Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2007-2008

Anne-Laure Dalibard

Étude mathématique de fluides en rotation rapide avec forçage en surface

Séminaire É. D. P. (2007-2008), Exposé n° X, 24 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2007-2008____A10_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2007-2008
Exposé n^{o} X, 1-24

Étude mathématique de fluides en rotation rapide avec forçage en surface

Anne-Laure Dalibard*,†

3 juillet 2008

Résumé

Le but de cette note est de décrire mathématiquement l'effet d'un forçage surfacique sur des fluides incompressibles et homogènes en rotation rapide. Cette question surgit naturellement dans des modèles de fluides géophysiques : en effet, l'évolution temporelle des courants océaniques dans le référentiel terrestre en rotation est régie par les équations de Navier-Stokes-Coriolis, et l'action du vent est décrite par une condition de Neumann non homogène à la surface de l'océan. L'un des enjeux de ce travail est de mettre en évidence des phénomènes de résonance entre les oscillations temporelles du forçage et celles engendrées par la force de Coriolis à l'intérieur du fluide. Plus précisément, on étudie un modèle linéaire, avec un forçage presque périodique et fortement oscillant en temps ; on montre alors que les fréquences résonnantes du forçage donnent naissance à des couches limites dont la taille est beaucoup plus grande que celle des couches d'Ekman habituelles, et font apparaître un profil vertical singulier. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Laure Saint-Raymond.

D'autre part, on étudie un modèle non-linéaire, avec un forçage aléatoire et stationnaire. Sous des hypothèses de non-résonance, on montre un résultat de convergence forte vers un système limite qui demeure aléatoire, mais dont on peut caractériser le comportement moyen.

*Université Paris-Dauphine, Ceremade, F-75016 Paris, France, dalibard@ceremade.dauphine.fr,

†CNRS, UMR7534, F-75016 Paris, France

1 Introduction

1.1 Présentation du modèle

Le but de cette note est de décrire la circulation des courants océaniques entraînés par le vent. D'après les ouvrages de Pedlosky [14, 15] et Gill [6], l'évolution de la vitesse u des courants à l'intérieur de l'océan est régie par l'équation

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t u + (u\cdot\nabla)u) + \nabla p = \mathcal{F} + 2u \wedge \Omega\,, \\ \nabla\cdot u = 0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

où ρ est la densité du fluide (supposée constante et homogène), p la pression à l'intérieur du fluide, Ω le vecteur rotation de la Terre et $\mathcal{F}$ représente les forces de friction.

Plusieurs hypothèses de modélisation sont nécessaires afin de réduire la complexité de ce système ; tout d'abord, on suppose que la zone géographique considérée se situe à des latitudes tempérées, et que son étendue horizontale est restreinte. On se place donc dans le cadre du « modèle f-plan », ce qui revient à négliger l'effet de la composante horizontale de Ω, et à supposer la composante verticale est indépendante de la latitude.

Par ailleurs, il est usuel de supposer que les forces de friction peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathcal{F} = A_h\Delta_h u + A_z\partial_z^2 u;$$

Cette représentation est issue d'une modélisation turbulente de la viscosité (voir [14]), et par conséquent les valeurs effectives de A_h et A_z sont en général bien plus grandes que la valeur moléculaire de la viscosité de l'eau.

Enfin, afin de s'affranchir des effets de bords dûs aux côtes, on suppose que l'océan est un parallélépipède de la forme

$$[0, a_1L) \times [0, a_2L) \times [0, a_3D).$$

On munit (1) de conditions aux bords périodiques dans la variable horizontale, et on suppose que

$$u_{3|z=a_3D} = 0, \quad \partial_z u_{h|a_3D} = \Sigma\,, \tag{2}$$

à la surface de l'océan, et

$$u_{|z=0} = 0\,, \tag{3}$$

au fond. On étudie le comportement asympotique du fluide dans le régime de paramètres suivant :

$$\frac{U}{2L\Omega} = \varepsilon \to 0, \quad \frac{A_h}{\rho UL} \sim 1, \quad \frac{LA_z}{\rho UD^2} = \nu \to 0. \tag{4}$$

Après adimensionnement, le système (1) devient

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \frac{1}{\varepsilon} e_3 \wedge u - \Delta_h u - \nu \partial_{zz} u + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot u = 0\,, \end{aligned} \tag{5}$$

muni des conditions aux bords

$$\begin{aligned} \partial_z u_{h|z=a_3} = \beta\sigma, \quad u_{3|z=a_3} = 0 \\ u_{|z=0} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

où β est la taille typique du forçage après mise à l'échelle. Dans toute la suite, on note $\mathbb{T}^2 = [0, a_1) \times [0, a_2)$ le domaine horizontal.

1.2 Résultats généraux sur l'étude des fluides en rotation rapide

L'analyse asymptotique du système (5) muni de conditions aux bords de type Dirichlet a déjà été menée par plusieurs auteurs ; on pourra par exemple se référer à l'ouvrage général [2]. L'une des caractéristiques du système (5) consiste en l'apparition d'oscillations temporelles rapides, à des fréquences d'ordre ε^{-1}. En effet, on s'attend à ce que le système limite soit gouverné par une équation du type

$$\partial_t u + \frac{1}{\varepsilon} L u = 0, \quad u \in V_0$$

où

$$\begin{aligned} V_0 :=& \{u \in L^2(\mathbb{T}^2 \times [0,a_3]) \quad / \quad \nabla\cdot u = 0 \text{ et } u_{3|z=0} = u_{3|z=a_3} = 0\}, \\ \mathbb{P} :=& \text{ projection orthogonale sur } V_0 \text{ dans } L^2(\mathbb{T}^2 \times [0,a_3]), \\ L :=& \mathbb{P}(e_3 \wedge \cdot). \end{aligned}$$

Une étude spectrale de l'opérateur de Coriolis L (voir [2]) montre qu'il existe une base hilbertienne $(N_k)_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ de V_0 telle que pour tout k,

$$LN_k = i\lambda_k N_k \text{ avec } \lambda_k = -\frac{k_3'}{|k'|}, \quad k' = \left(\frac{2\pi}{a_1}k_1, \frac{2\pi}{a_2}k_2, \frac{\pi}{a_3}k_3\right).$$

L'effet principal de l'opérateur de Coriolis est donc de créer des ondes, se propageant à des fréquences λ_k/ε. Afin de comprendre l'évolution lente de la fonction u, l'idée est ensuite d'utiliser des méthodes de filtrage, élaborées indépendamment par Steven Schochet [16] et Emmanuel Grenier [7]. Plus précisément, la fonction

$$u_L := \exp\left(\frac{t}{\varepsilon}L\right)u$$

vérifie une équation non-linéaire, dans laquelle il n'y a plus de terme de pénalisation. Le but est alors de passer à la limite dans cette équation filtrée. Pour cela, la difficulté mathématique majeure réside dans la compréhension du phénomène de viscosité verticale évanescente ; les travaux [5, 8, 10, 11, 12] mettent en évidence la formation de couches limites horizontales, appelées couches d'Ekman, de taille typique $\sqrt{\varepsilon\nu}$, et dont le rôle est de rétablir les conditions aux bords éventuellement violées par la solution de l'équation limite. L'équation limite obtenue, dite équation d'enveloppe, est de la forme

$$\partial_t \bar{u}_L + \bar{Q}(\bar{u}_L, \bar{u}_L) - \Delta_h \bar{u}_L + 2\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} S_{\text{Ekman}}(\bar{u}_L) = 0 \tag{7}$$

où $\bar{Q}$ est un opérateur bilinéaire symétrique, et $S_{\text{Ekman}} : V_0 \to V_0$ est un opérateur linéaire, continu et positif. Des résultats d'existence globale et d'unicité pour ce type d'équation sont donnés dans [2] dans l'espace $L^\infty_{\text{loc}}([0,\infty), V_0 \cap H^{0,1}) \cap L^2_{\text{loc}}([0,\infty), H^{1,0})$, où l'espace de Sobolev anisotrope $H^{s,s'}$ est défini par

$$H^{s,s'} := \left\{u \in L^2(\mathbb{T}^2 \times [0,a_3]) \ / \ \forall (\alpha_h, \alpha_3) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}, \right.$$
$$\left. |\alpha_h| \le s, |\alpha_3| \le s',\ \nabla_h^{\alpha_h} \partial_z^{\alpha_3} u \in L^2 \right\}.$$

Le résulat principal de [2] dans ce cadre est le suivant (voir aussi [12]) :

Proposition 1. *On suppose que $\nu = c_0\varepsilon$, avec $c_0 \in \mathbb{R}$ fixé.*

Soit $u_0 \in V_0 \cap H^{0,1}$, et soit $u^{\varepsilon,\nu}$ la solution de l'équation (5) *munie des conditions aux bords*

$$u^{\varepsilon,\nu}_{|z=0} = u^{\varepsilon,\nu}_{|z=a_3} = 0,$$

et de la condition initiale

$$u^{\varepsilon,\nu}_{|t=0} = u_0.$$

On note $\bar{u}_L \in L^\infty([0,\infty), H^{0,1} \cap V_0) \cap L^2([0,\infty), H^{1,0})$ l'unique solution de l'équation (7) *avec $\bar{u}_{L|t=0} = u_0$.*

Alors

$$u^{\varepsilon,\nu} - \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}L\right)\bar{u}_L \to 0 \quad \textit{lorsque } \varepsilon, \nu \to 0$$

dans $L^\infty_{loc}([0,\infty), L^2(\mathbb{T}^2 \times [0,a_3])) \cap L^2_{loc}([0,\infty), H^1_h(\mathbb{T}^2 \times [0,a_3]))$.

1.3 Hypothèses sur le terme de forçage

On a vu au paragraphe précédent que l'opérateur de Coriolis génère des oscillations temporelles à des fréquences d'ordre $1/\varepsilon$. Dès lors, il est pertinent, d'un point de vue mathématique, d'étudier des conditions aux limites du type

$$\partial_z u_{h|z=a_3}(t, x_h) = \beta\sigma\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, x_h\right),$$

où $\sigma(t, \tau, \cdot)$ est une fontion $\mathbb{T}^2$-périodique pour tous t, τ. Nous étudierons ici deux types de dépendance en τ :

- **Cas presque périodique :** soit $M \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini. On suppose que σ est de la forme

$$\sigma(t, \tau, x_h) = \sum_{\mu \in M} \sum_{k_h} \hat{\sigma}(\mu, k_h) e^{i\mu\tau} e^{k'_h \cdot x_h}. \tag{8}$$

  Ce cas a déjà été étudié par Nader Masmoudi dans [12] lorsque l'ensemble M ne contient pas les fréquences ± 1. L'enjeu est donc ici de comprendre les effets du forçage pour $\mu = \pm 1$.
- **Cas stationnaire aléatoire :** on considère un espace probabilisé $(E, \mathcal{A}, m_0)$, muni d'un groupe de transformations $(\theta_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}$ préservant la mesure m_0.
  On suppose que $\sigma \in L^\infty([0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{T}^2 \times E)$ vérifie

$$\sigma(t, \tau + \tau', x_h; \omega) = \sigma(t, \tau', x_h; \theta_\tau \omega) \tag{9}$$

  pour tout t, x_h, τ, τ', presque sûrement en ω. Ce cadre englobe le cas presque périodique (voir [13]) ; son intérêt est d'introduire un caractère aléatoire dans l'équation, ce qui peut permettre de développer des techniques de moyennisation d'équations non linéaires en vue d'études mathématiques de la turbulence.

2 Résultats principaux

• Le premier résultat porte sur une version linéaire de l'équation (5). Plus précisément, on considère la solution $u^{\varepsilon,\nu}$ de l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t u^{\varepsilon,\nu} + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}(e_3 \wedge u^{\varepsilon,\nu}) - \Delta_h u^{\varepsilon,\nu} - \nu\partial_{zz} u^{\varepsilon,\nu} = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u^{\varepsilon,\nu}_{|t=0} = u_0 \end{aligned} \tag{10}$$

munie des conditions aux bords (6), où σ est de la forme (8). On suppose de surcroît que le forçage σ n'a qu'un nombre fini de fréquences horizontales k_h, et on rappelle que l'ensemble M des fréquences temporelles est supposé fini. Enfin, on prend $\beta = (\varepsilon\nu)^{-\kappa}$, avec $0 < \kappa < 3/14$.

On a alors le théorème suivant (voir [4]) :

Théorème 1. *Soit $u_0 \in V_0 \cap H^{0,1}$. On considère la solution*

$$\bar{u}_L \in L^\infty([0,\infty), V_0 \cap H^{0,1}) \cap L^2([0,\infty), H^{1,0})$$

de l'équation d'enveloppe

$$\begin{aligned} &\partial_t \bar{u}_L - \Delta_h \bar{u}_L + \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} S_{Ekman}(\bar{u}_L) = 0, \\ &\bar{u}_{L|t=0} = u_0. \end{aligned} \tag{11}$$

Alors lorsque $\varepsilon, \nu \to 0$ avec $\nu = \mathcal{O}(\varepsilon)$, on a

$$u^{\varepsilon,\nu} - \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon} L\right) \bar{u}_L \to 0$$

dans $L^\infty_{loc}([0,\infty), L^2(\mathbb{T}^2 \times [0, a_3))) \cap L^2_{loc}([0,\infty), H^{1,0})$.

Remarque 1. **(i)** *Ce théorème peut être généralisé à des cadres où $\nu \gg \varepsilon$ (voir [4]), mais les conditions sur β sont alors plus restrictives.*
(ii) *Dans les conditions de validité du théorème, le forçage ne crée pas de terme source (dit de pompage d'Ekman) dans l'équation d'enveloppe. En effet, on montre que le terme correspondant est d'ordre $\nu\beta$ en général (voir par exemple [12]), et $\nu\beta = o(1)$ compte tenu des hypothèses sur ν et β.*

La technique de preuve exposée dans [4] repose sur la construction d'une solution approchée, composée de termes intérieurs, dont le rôle est de faire en sorte que l'équation (10) soit vérifiée à des termes d'erreurs $o(1)$ près, et de termes de couches limites, qui rétablissent les conditions aux limites dans la variable horizontale. On n'exposera ici que les grandes idées de la démonstration, en mettant l'accent sur les comportement originaux. La première étape de la preuve consiste à analyser l'opérateur de couche limite. Le cadre presque périodique permet d'effectuer de nombreux calculs explicites (voir section 3) et ainsi d'aborder des problèmes plus singuliers que dans le cas aléatoire ; on verra en particulier que les profils de couches limites correspondant aux modes quasi-résonnants $\mu = \pm 1$, $k_h \neq 0$ sont atypiques, dans le sens où leur taille est beaucoup plus grande que celle des couches d'Ekman habituelles, obtenues pour $\mu \neq \pm 1$. D'autre part, le forçage sur le mode résonnant $\mu = \pm 1$, $k_h = 0$ ne peut être entièrement absorbé dans une couche limite indépendante du temps, aussi grande soit-elle. Pour ce mode résonnant, on définit donc un profil singulier, de taille β dans L^∞.

En outre, en raison de la contrainte de divergence nulle, la condition de Dirichlet sur la composante verticale du champ de vitesses n'est plus vérifiée sur le bord. Il faut alors introduire un correcteur, de taille négligeable dans L^2, afin de rétablir cette condition. En réalité, l'ajout d'un seul correcteur n'est pas suffisant pour obtenir une approximation convenable de la solution, et on est amené à utiliser une construction en boucle, répétant plusieurs fois le procédé décrit ci-dessus. On n'explicitera ici qu'une étape élémentaire de cet « algorithme », et on renvoie le lecteur à [4] pour plus de détails. Il convient toutefois de souligner que la méthode employée dans [4] ne permet pas d'obtenir un développement asymptotique de la solution. En effet, les pertes de régularité lors de chaque étape élémentaire sont telles que l'on n'est pas capable d'itérer le procédé pour l'ensemble de la solution approchée.

• Le deuxième résultat porte sur le comportement asymptotique des solutions de l'équation (5), munie des conditions aux bords (6), où la fonction σ est stationnaire aléatoire. Afin d'éviter les comportements pathologiques décrits plus haut et liés aux modes $\mu = \pm 1$, on introduit une notion de spectre approché pour la fonction σ, ainsi que des hypothèses de non-résonance, visant à assurer que σ n'a pas d'oscillations à des fréquences proches de ± 1.

Définition 1 (Transformée de Fourier approchée)**.** *Soit $\alpha > 0$ quelconque. On appelle transformée de Fourier approchée de σ la fonction*

$$\hat{\sigma}_\alpha(t, \lambda, x_h; \omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\alpha|\tau|) e^{-i\lambda\tau} \sigma(t, \tau, x_h; \omega)\, d\tau.$$

On définit également la famille de fonctions

$$\sigma_\alpha(\tau, \omega) := \int_{\mathbb{R}} \exp(-\alpha|\lambda|) e^{i\lambda\tau} \hat{\sigma}_\alpha(\lambda, \omega)\, d\lambda,$$

et on montre facilement (voir [3]) que si $\sigma \in L^\infty([0,T] \times [0,\infty) \times E, H^s(\mathbb{T}^2)) \cap L^\infty([0,T] \times E, \mathcal{C}(\mathbb{R}_\tau, H^s(\mathbb{T}^2)))$, alors pour tout $T' > 0$,

$$\lim_{\alpha \to 0} \|\sigma - \sigma_\alpha\|_{L^\infty([0,T]\times[0,T']\times E, H^s(T^2))} = 0.$$

Pour simplifier, on suppose dans toute la suite que le forçage σ n'a qu'un nombre fini de modes de Fourier horizontaux, de sorte que toutes les normes $H^s(\mathbb{T}^2)$ sont contrôlées par la norme $L^2(\mathbb{T}^2)$. Les hypothèses de non-résonance sont les suivantes :

(H1) Pour tout $\alpha > 0$, $\hat{\sigma}_\alpha \in L^\infty(E \times [0,T], L^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2)))$, et

$$\sup_{\alpha>0} ||\hat{\sigma}_\alpha||_{L^\infty(E\times[0,T],L^1(\mathbb{R},L^2(\mathbb{T}^2)))} < +\infty.$$

(H2) Il existe des voisinages $V_\pm$ de ± 1, indépendants de $\alpha > 0$, tels que

$$\lim_{\alpha\to 0} \sup_{\lambda\in V_+\cup V_-} \|\hat{\sigma}_\alpha(\lambda)\|_{L^\infty([0,T]\times E,L^2(\mathbb{T}^2))} = 0.$$

Dans ces conditions, on a le résultat suivant (voir [3]) :

Théorème 2. *On suppose que $\nu = \mathcal{O}(\varepsilon)$, que $\beta\sqrt{\nu\varepsilon} = \mathcal{O}(1)$, et que σ vérifie les hypothèses* **(H1)-(H2)**. *On suppose de plus que $\partial_\tau\sigma \in L^\infty([0,\infty)_t \times [0,\infty)_\tau \times E \times \mathbb{T}^2)$.*

On considère l'unique solution

$$\bar{u}_L \in L^\infty_{loc}([0,\infty) \times E, V_0 \cap H^{0,1}) \cap L^\infty(E, L^2_{loc}([0,\infty), H^{1,0})$$

de l'équation d'enveloppe

$$\begin{aligned} &\partial_t\bar{u}_L + \bar{Q}(\bar{u}_L, \bar{u}_L) - \Delta_h\bar{u}_L + \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} S_{Ekman}(\bar{u}_L) + \nu\beta S_{surface}(\sigma) = 0, \\ &\bar{u}_{L|t=0} = u_0, \end{aligned} \tag{12}$$

où le terme source $S_{surface}(\sigma) \in L^\infty_{loc}([0,\infty)\times E, V_0\cap H^{0,1})$ est défini par (31) *ci-dessous.*

Alors si $u^{\varepsilon,\nu}$ est une solution de l'équation (5) *munie des conditions aux bords* (6)*, on a*

$$u^{\varepsilon,\nu} - \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}L\right)\bar{u}_L \to 0$$

dans $L^\infty_{loc}([0,\infty), L^2(\mathbb{T}^2\times[0,a_3)\times E))\cap L^2_{loc}([0,\infty), L^2(E, H^1_h(\mathbb{T}^2\times[0,a_3))))$.

La méthode de preuve de ce résultat est proche de celle du Théorème 1 : l'idée est de définir une solution approchée, obtenue comme la somme de termes de couches limites et de termes intérieurs. La nouveauté réside dans la construction de termes de couches limites stationnaires en temps, ainsi que dans le filtrage de termes aléatoires et oscillants au moyen du théorème ergodique. De plus, grâce aux hypothèses **(H1)-(H2)**, les comportements atypiques qui surgissent dans le cas résonnant sont évités, de sorte que l'amplitude du forçage β peut être choisie bien plus grande que dans le Théorème 1. Par conséquent, on n'a pas nécessairement $\nu\beta = o(1)$, ce qui explique la présence dans (12) du terme de pompage d'Ekman dû au vent, soit $S_{\text{surface}}(\sigma)$.

• En général, la solution $\bar{u}_L$ de l'équation (12) est aléatoire, en raison du terme de pompage $S_{\text{surface}}(\sigma)$. De plus, comme l'équation vérifiée par $\bar{u}_L$ est non-linéaire, il semble difficile au premier abord d'en déduire une équation sur l'espérance de $\bar{u}_L$, que l'on note $\mathbb{E}[\bar{u}_L]$. Mais dans le cas du tore non-résonnant, il est possible d'obtenir un système d'équations découplées sur $\mathbb{E}[\bar{u}_L]$, et ainsi de connaître le comportement moyen de $u^{\varepsilon,\nu}$ à la limite. Rappelons tout d'abord la condition de non-résonance sur le tore $\mathbb{T}^3 := \mathbb{T}^2 \times [-a_3, a_3]$ (voir [2])

$$\forall (k,n) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\},$$
$$\big(\exists \eta \in \{-1,1\}^3, \eta_1\lambda_k + \eta_2\lambda_{n-k} - \eta_3\lambda_n = 0\big) \Rightarrow k_3 n_3 = 0. \quad (13)$$

On peut vérifier (voir [1]) que la propriété (13) est vérifiée pour presque toutes les valeurs du triplet (a_1, a_2, a_3). Il est connu (voir [1, 2, 12]) que le système limite se découple alors en un système de Navier-Stokes à deux dimensions sur la moyenne verticale de $\bar{u}_L$, et une équation linéaire sur la partie dépendante de z. L'intérêt de ce découplage dans le cas qui nous intéresse réside dans le fait que l'équation sur la moyenne verticale de $\bar{u}_L$ est déterministe, de sorte qu'il devient aisé d'identifier la moyenne de $\bar{u}_L$.

On rappelle la définition suivante :

Définition 2 (Groupe de transformations ergodique)**.** *On dit que le groupe de transformations invariantes $(\theta_\tau)_{\tau\in\mathbb{R}}$ est ergodique si pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a*

$$\theta_\tau A \subset A \forall \tau \in \mathbb{R} \mapsto P(A) = 0 \text{ ou } 1.$$

On a la Proposition (voir [3]) :

Proposition 2. *On suppose que l'hypothèse* (13) *est vérifiée, et que le groupe de transformations $(\theta_\tau)_{\tau\in\mathbb{R}}$ agissant sur E est ergodique. On peut alors décomposer $\bar{u}_L$ en*

$$\bar{u}_L = \bar{w} + \tilde{w} + \tilde{u},$$

où $\bar{w} = (\bar{w}_h, 0)$ vérifie une équation de Navier-Stokes à deux dimensions

$$\partial_t \bar{w}_h + \bar{w}_h \cdot \nabla_h \bar{w}_h - \Delta_h \bar{w}_h + \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{2}a_1a_2a_3} \bar{w}_h + \nu\beta\mathbb{E}\left[S_{surface}(\sigma)\right]_h = \nabla_h \bar{p},$$

$$\operatorname{div}_h \bar{w}_h = 0,$$

$$\bar{w}_{h|t=0}(x_h) = \frac{1}{a_3}\int_0^{a_3} u_{0,h}(x_h, z)\, dz,$$

et $\tilde{w}, \tilde{u}$ vérifient des équations linéaires

$$\partial_t \tilde{w} + 2\bar{Q}(\bar{w}, \tilde{w}) - \Delta_h \tilde{w} + \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} S_{Ekman}(\tilde{w}) = 0,$$
$$\tilde{w}_{1|t=0} = u_0 - \bar{w}_{|t=0},$$

et

$$\partial_t \tilde{u} + 2\bar{Q}(\bar{w}, \tilde{u}) - \Delta_h \tilde{u} + \nu\beta S_{surface}(\sigma) - \nu\beta \mathbb{E}[S_{surface}(\sigma)] = 0,$$
$$\tilde{u}_{|t=0} = 0,$$

Par conséquent, $\bar{w}$ et $\tilde{w}$ sont déterministes, tandis que $\mathbb{E}[\tilde{u}] = 0$. En particulier, on en déduit que

$$\mathbb{E}[\bar{u}_L] = \bar{w} + \tilde{w}.$$

On renvoie à [3] pour la preuve de cette Proposition.

• Dans la mesure où les techniques de preuve des Théorèmes 1 et 2 sont similaires, on construira simultanément les solutions approchées dans les cas aléatoire et presque périodique, en ne distinguant les deux cadres que lorsque cela est nécessaire. L'organisation de cette note est la suivante : la troisième section est dédiée à la construction des opérateurs de couches limites dans un cadre général (conditions de type Neumann à la surface, de Dirichlet au fond). La quatrième concerne la construction des termes intérieurs, ce qui englobe la dérivation des équations d'enveloppe (11) et (12), ainsi que la définition des termes correcteurs. Enfin, dans la cinquième section, on donne une esquisse des preuves de convergence, en expliquant comment la solution approchée est construite *via* un couplage entre les termes intérieurs et les termes de couches limites, et en donnant quelques principes généraux sur les méthodes d'énergie.

3 Opérateur de couche limite

Dans cette partie, on construit un opérateur $\mathcal{B}_{\text{pér}}$ (resp. $\mathcal{B}_{\text{stat}}$), qui associe à des fonctions $\delta_{B,h}, \delta_{T,h} \in L^\infty([0,\infty), L^2(\mathbb{T}^2))$ presque périodiques en temps (resp. stationnaires aléatoires), un terme de couche limite v, solution approchée de l'équation (10) munie des conditions aux bords

$$v_{h|z=0} = \delta_{B,h} + o(1),$$
$$\partial_z v_{h|z=a_3} = \beta\delta_{T,h} + o(\beta).$$

En s'appuyant sur les analyses de [2, 5, 12], on est amené à prendre v de la forme

$$v(t,x) = v_B\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_h, \frac{z}{\sqrt{\varepsilon\nu}}\right) + v_T\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_h, \frac{a_3 - z}{\sqrt{\varepsilon\nu}}\right),$$

où les fonctions v_B, v_T vérifient les conditions suivantes :

- $v_B, v_T \in L^\infty([0,\infty), L^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,\infty)))$, et v_B, v_T sont des fonctions presque périodiques en temps (resp. stationnaires aléatoires), à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{T}^2 \times [0,\infty))$;
- Pour presque tout $(\tau, x_h) \in [0,\infty) \times \mathbb{T}^2$, on a

$$\lim_{\zeta\to\infty} v_B(\tau, x_h, \zeta) = \lim_{\zeta\to\infty} v_T(\tau, x_h, \zeta) = 0;$$

- v_B, v_T vérifient les conditions suivantes en $\zeta = 0$:

$$v_{B,h|\zeta=0}\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_h\right) = \delta_{B,h}(t, x_h),$$
$$\partial_\zeta v_{T,h|\zeta=0}\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_h\right) = -\beta\sqrt{\varepsilon\nu}\,\delta_{T,h}(t, x_h).$$

À partir de là, les constructions des cas presque périodique et stationnaire diffèrent : dans le cas presque périodique, des calculs explicites mode par mode sont possibles, et les fonctions v_B, v_T sont donc des solutions exactes de l'équation (10) après mise à l'échelle des variables de temps et d'espace. Dans le cas stationnaire aléatoire, en revanche, la construction exposée plus bas ne donne que des solutions approchées de l'équation d'évolution.

3.1 Cas presque périodique

Les conditions aux bords sont données par

$$\begin{pmatrix}\delta_{B,h}(t,x_h)\\ \delta_{T,h}(t,x_h)\end{pmatrix} = \sum_\mu \sum_{k_h} \begin{pmatrix}\hat\delta_{B,h}(\mu,k_h)\\ \hat\delta_{T,h}(\mu,k_h)\end{pmatrix} e^{i\mu\frac{t}{\varepsilon}} e^{ik_h'\cdot x_h};$$

on cherche donc v_B, v_T sous la forme

$$\begin{pmatrix}v_B(\tau,x_h,\zeta)\\ v_T(\tau,x_h,\zeta)\end{pmatrix} = \sum_\mu \sum_{k_h} \begin{pmatrix}\hat v_B(\mu,k_h)\\ \hat v_T(\mu,k_h)\end{pmatrix} e^{i\mu\tau} e^{ik_h'\cdot x_h} e^{-\lambda(\mu,k_h)\zeta},$$

où le nombre complexe $\lambda(\mu, k_h)$ doit être tel que $\Re(\lambda(\mu,k_h)) > 0$. En insérant cet Ansatz dans l'équation (10) et en tenant compte des termes de pression et de viscosité horizontale, on trouve que les composantes horizontales de $\hat{v}_B$ et $\hat{v}_T$ sont solutions du système

$$\begin{aligned} i\mu\hat{v}_1 - \lambda^2\hat{v}_1 + \varepsilon k_h^2\hat{v}_1 - \hat{v}_2 + \varepsilon\nu\frac{k_1k_2\hat{v}_1 - k_1^2\hat{v}_2}{\lambda^2 - \varepsilon\nu k_h^2} = 0, \\ i\mu\hat{v}_2 - \lambda^2\hat{v}_2 + \varepsilon k_h^2\hat{v}_2 + \hat{v}_1 + \varepsilon\nu\frac{-k_1k_2\hat{v}_2 + k_2^2\hat{v}_1}{\lambda^2 - \varepsilon\nu k_h^2} = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

tandis que les composantes verticales de $\hat{v}_B$ et $\hat{v}_T$ sont données par la condition de divergence nulle :

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon\nu}(ik_1'\hat{v}_{B,1} + ik_2'\hat{v}_{B,2}) - \lambda\hat{v}_{B,3} = 0, \\ \sqrt{\varepsilon\nu}(ik_1'\hat{v}_{T,1} + ik_2'\hat{v}_{T,2}) + \lambda\hat{v}_{T,3} = 0. \end{aligned}$$

Le problème se ramène donc à trouver les valeurs de λ pour lesquelles le système (14) possède une solution $(\hat{v}_1, \hat{v}_2)$ non nulle, ce qui revient encore à écrire

$$\det A_\lambda(\mu, k_h) = 0, \tag{15}$$

où la matrice A_λ est définie par

$$A_\lambda(\mu, k_h) = \begin{pmatrix} i\mu - \lambda^2 + \varepsilon k_h^2 + \dfrac{\varepsilon\nu k_1k_2}{\lambda^2 - \varepsilon\nu k_h^2} & -1 - \dfrac{\varepsilon\nu k_1^2}{\lambda^2 - \varepsilon\nu k_h^2} \\ 1 + \dfrac{\varepsilon\nu k_2^2}{\lambda^2 - \varepsilon\nu k_h^2} & i\mu - \lambda^2 + \varepsilon k_h^2 - \dfrac{\varepsilon\nu k_1k_2}{\lambda^2 - \varepsilon\nu k_h^2} \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi une équation algébrique sur λ^2. Trois cas de figure se présentent (voir [4] pour plus de détails) :

– **Premier cas :** $|\mu| \neq 1$.
  Ce cas a déjà été étudié par plusieurs auteurs (voir par exemple [2, 12]). La construction du terme de couche limite repose alors sur le fait que les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} i\mu & -1 \\ 1 & i\mu \end{pmatrix}$$

  sont non nulles. Par conséquent, les valeurs de λ telles que $\det A_\lambda = 0$ vérifient

$$\exists C = C(\mu, k_h) > 0, \quad \forall \varepsilon, \nu > 0, \quad |\lambda(\mu, k_h)|, |\lambda(\mu, k_h)^{-1}| \leq C(\mu, k_h),$$

  et on peut négliger la pression et le terme de viscosité horizontale dans (10). Plus précisément, l'équation (15) admet deux solutions, notées

λ^+ et λ^-, de parties réelles strictement positives. Pour chacune de ces valeurs, on choisit $w_\pm(\mu, k_h) \in \ker A_{\lambda^\pm}(\mu, k_h)$ de norme 1, et on montre que pour tout μ, k_h, $(w^-(\mu, k_h), w^+(\mu, k_h))$ forment une base de $\mathbb{C}^2$; soulignons que les vecteurs $w^\pm$ dépendent des petits paramètres ε, ν. On décompose ensuite $\hat{\delta}_{B,h}(\mu, k_h)$, $\hat{\delta}_{T,h}(\mu, k_h)$ sur la base (w^-, w^+) :

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{T,h}(\mu, k_h) &= \alpha_T^+(\mu, k_h) w^+(\mu, k_h) + \alpha_T^-(\mu, k_h) w^-(\mu, k_h),\\ \hat{\delta}_{B,h}(\mu, k_h) &= \alpha_B^+(\mu, k_h) w^+(\mu, k_h) + \alpha_B^-(\mu, k_h) w^-(\mu, k_h).\end{aligned} \tag{16}$$

La composante horizontale du terme de bord correspondant au mode (μ, k_h) est donc égale à

$$\begin{aligned}&\sum_{+,-} \alpha_B^\pm(\mu, k_h) w^\pm(\mu, k_h) \exp\left(i\mu\frac{t}{\varepsilon} + ik_h' \cdot x_h - \lambda^\pm(\mu, k_h)\frac{z}{\sqrt{\varepsilon\nu}}\right)\\ &+ \beta\sqrt{\varepsilon\nu} \sum_{+,-} \frac{1}{\lambda^\pm(\mu, k_h)} \alpha_T^\pm(\mu, k_h) w^\pm(\mu, k_h)\\ &\qquad\qquad \exp\left(i\mu\frac{t}{\varepsilon} + ik_h' \cdot x_h - \lambda^\pm(\mu, k_h)\frac{a_3 - z}{\sqrt{\varepsilon\nu}}\right).\end{aligned} \tag{17}$$

– **Deuxième cas :** $|\mu| = 1,\ k_h \neq 0$.
En ce cas, l'une des valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} i\mu & -1 \\ 1 & i\mu \end{pmatrix}$$

est nulle, et par conséquent le taux de décroissance λ peut s'annuler lorsque ε, ν tendent vers zéro. Précisément, on trouve que les racines λ^+, λ^- de l'équation (15) vérifient

$$\begin{aligned}C(k_h)^{-1} &\leq |\lambda^{-\mu}(\mu, k_h)| \leq C(k_h),\\ C(k_h)^{-1}(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon\nu})^{-1/2} &\leq |\lambda^\mu(\mu, k_h)| \leq C(k_h)(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon\nu})^{1/2}.\end{aligned}$$

Comme précédemment, on choisit ensuite $w^\pm(\mu, k_h) \in \ker A_{\lambda^\pm}(\mu, k_h)$, et on trouve encore une fois que μ, k_h, $(w^-(\mu, k_h), w^+(\mu, k_h))$ forment une base de $\mathbb{C}^2$. La fin du raisonnement est analogue à celle du premier cas. On voit ainsi qu'un forçage sur les modes $\mu = \pm 1$ crée des couches limites de taille $\sqrt{\varepsilon\nu}/(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon\nu})^{1/2}$, et donc beaucoup plus grandes que les couches d'Ekman habituelles.

Remarque 2. *En réalité, plusieurs valeurs de λ^μ conviennent ; néanmoins, si λ, λ' sont deux valeurs possibles de λ^μ, et si w, w' sont deux* *vecteurs normés de* $\ker A_\lambda, \ker A_{\lambda'}$, *on trouve que*

$$\det(w, w') \to 0$$

quand $\varepsilon, \nu \to 0$. *On choisit donc arbitrairement une valeur de* λ^μ *parmi toutes les valeurs possibles.*

– **Troisième cas :** $|\mu| = 1,\ k_h = 0$.
En ce cas, les solutions $\lambda^\pm$ de l'équation (15) vérifient exactement

$$(\lambda^\pm(\mu, 0))^2 = i(\mu \mp 1),$$

et on a

$$\ker A_{\lambda^\pm}(\mu, 0) = \mathrm{Vect}(1, \pm i).$$

On observe en particulier que $\lambda^\mu(\mu, 0) = 0$, ce qui entraîne qu'une partie des conditions aux bords ne peut être absorbée dans un terme de couche limite. Cependant, en posant $w^\pm = (1, \pm i)$ et en définissant toujours $\alpha_B^\pm$, $\alpha_T^\pm$ par (16), on voit que la quantité

$$\begin{aligned}\left(\alpha_B^\mu(\mu, 0) + \beta z \alpha_T^\mu(\mu, 0)\right) w^\mu e^{i\mu\frac{t}{\varepsilon}} \\ + \left[\alpha_B^{-\mu}(\mu, 0) \exp\left(-\lambda^{-\mu} \frac{z}{\sqrt{\varepsilon\nu}}\right)\right. \\ \left. + \beta\sqrt{\varepsilon\nu}\alpha_T^{-\mu}(\mu, 0) \exp\left(-\lambda^{-\mu}\frac{a_3 - z}{\sqrt{\varepsilon\nu}}\right)\right] w^\mu e^{i\mu\frac{t}{\varepsilon}}\end{aligned}$$

est solution de l'équation (10), et vérifie les conditions aux bords voulues, à des termes exponentiellement petits près. Néanmoins, le profil vertical

$$v^{\mathrm{sing}}(t, x) := \sum_{\mu \in \{-1, 1\}} \left(\alpha_B^\mu(\mu, 0) + \beta z \alpha_T^\mu(\mu, 0)\right) w^\mu e^{i\mu\frac{t}{\varepsilon}} \tag{18}$$

n'est pas négligeable à $t = 0$; afin de compenser l'erreur ainsi commise sur la donnée initiale, on introduit donc une fonction u^{sing}, solution de

$$\begin{aligned}\partial_t u^{\mathrm{sing}} + \frac{1}{\varepsilon}(u^{\mathrm{sing}})^\perp - \nu\partial_z^2 u^{\mathrm{sing}} = 0, \\ u^{\mathrm{sing}}_{|t=0} = -v^{\mathrm{sing}}_{|t=0}, \\ \partial_z u^{\mathrm{sing}}_{|z=a_3} = 0, \quad u^{\mathrm{sing}}_{|z=0} = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

En décomposant u^{sing} sur une base de Fourier adéquate, on peut obtenir des formules explicites ; on montre également que la quantité

$u^{\mathrm{sing}}(t) + v^{\mathrm{sing}}(t)$ est exponentiellement petite en dehors de couches limites de taille $\sqrt{\nu t}$ localisées près de la surface et du fond (voir [4] pour plus de détails).

Pour $(\mu, k_h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^2$, on pose

$$W_B^{\pm}(\mu, k_h) = \begin{pmatrix} w^{\pm}(\mu, k_h) \\ \mathbf{1}_{k_h \neq 0} \frac{\sqrt{\varepsilon\nu}}{\lambda^{\pm}(\mu, k_h)} i k_h' \cdot w^{\pm}(\mu, k_h) \end{pmatrix},$$

$$W_T^{\pm}(\mu, k_h) = \beta \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\varepsilon\nu}}{\lambda^{\pm}(\mu, k_h)} w^{\pm}(\mu, k_h) \\ -\mathbf{1}_{k_h \neq 0} \frac{\varepsilon\nu}{(\lambda^{\pm}(\mu, k_h))^2} i k_h' \cdot w^{\pm}(\mu, k_h) \end{pmatrix}.$$

L'opérateur $\mathcal{B}_{\text{pér}}$ est alors défini par

$$\mathcal{B}_{\text{pér}}[\delta_{B,h}, \delta_{T,h}] = \bar{u}^{\mathrm{BL}} + \tilde{u}^{\mathrm{BL}} + \bar{u}^{sing},$$

où les termes $\bar{u}^{\mathrm{BL}}$, $\tilde{u}^{\mathrm{BL}}$ et $\bar{u}^{sing}$ sont donnés par les formules suivantes :

– **Profil singulier :**

$$\bar{u}^{sing} = \begin{pmatrix} v^{\mathrm{sing}} + u^{\mathrm{sing}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

v^{sing}, u^{sing} étant définis par (18),(19) respectivement ;

– **Couches limites atypiques**, de taille $\sqrt{\varepsilon\nu}/(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon\nu})^{1/2}$:

$$\begin{aligned} &\tilde{u}^{\mathrm{BL}}(t,x) := \\ &\sum_{\mu \in \{-1,1\}} \sum_{k_h \neq 0} e^{i\mu \frac{t}{\varepsilon} + i k_h' \cdot x_h} \Bigg[\alpha_B^{\mu}(\mu, k_h) W_B^{\mu}(\mu, k_h) \exp\left(-\lambda^{\mu}(\mu, k_h) \frac{z}{\sqrt{\varepsilon\nu}} \right) \\ &\qquad + \alpha_T^{\mu}(\mu, k_h) W_T^{\mu}(\mu, k_h) \exp\left(-\lambda^{\mu}(\mu, k_h) \frac{a_3 - z}{\sqrt{\varepsilon\nu}} \right) \Bigg] ; \end{aligned}$$

– **Couches limites classiques**, de taille $\sqrt{\varepsilon\nu}$:

$$\begin{aligned} &\bar{u}^{\mathrm{BL}}(t,x) = \\ &\sum_{\mu, |\mu| \neq 1} \sum_{k_h} \sum_{+,-} e^{i\mu \frac{t}{\varepsilon} + i k_h' \cdot x_h} \Bigg[\alpha_B^{\pm}(\mu, k_h) W_B^{\pm}(\mu, k_h) \exp\left(-\lambda^{\pm}(\mu, k_h) \frac{z}{\sqrt{\varepsilon\nu}} \right) \\ &\qquad + \alpha_T^{\pm}(\mu, k_h) W_T^{\pm}(\mu, k_h) \exp\left(-\lambda^{\pm}(\mu, k_h) \frac{a_3 - z}{\sqrt{\varepsilon\nu}} \right) \Bigg] \\ &+ \sum_{\mu \in \{-1,1\}} \sum_{k_h \neq 0} e^{i\mu \frac{t}{\varepsilon} + i k_h' \cdot x_h} \Bigg[\alpha_B^{-\mu}(\mu, k_h) W_B^{-\mu}(\mu, k_h) \exp\left(-\lambda^{-\mu}(\mu, k_h) \frac{z}{\sqrt{\varepsilon\nu}} \right) \\ &\qquad + \alpha_T^{-\mu}(\mu, k_h) W_T^{-\mu}(\mu, k_h) \exp\left(-\lambda^{-\mu}(\mu, k_h) \frac{a_3 - z}{\sqrt{\varepsilon\nu}} \right) \Bigg] \end{aligned}$$

3.2 Cas stationnaire aléatoire

Pour le cas stationnaire aléatoire, le cadre probabiliste abstrait ne permet pas de faire des calculs aussi explicites que dans le cas presque périodique, et en particulier, les termes de couches limites définis ici ne sont pas des solutions exactes de l'équation (10). L'idée est la suivante : afin de conserver la structure stationnaire, on cherche $v_{T,h}$ sous la forme

$$v_{T,h}(\tau, x_h, \zeta; \omega) = -\beta\sqrt{\varepsilon\nu} \sum_{j\in\{1,2\}} \int_0^\infty \delta_{T,j}(\tau - s, x_h; \omega)\phi_{T,j}(s,\zeta)\, ds \qquad (20)$$

(idem pour v_B). Les fonctions $\phi_{T,j}$ sont solutions de l'équation

$$\partial_s \phi_{T,j} + \phi_{T,j}^\perp - \partial_\zeta^2 \phi_{T,j} = 0,$$

munie des conditions aux bords

$$\partial_\zeta \phi_{T,1}(\zeta = 0) = \delta_0(\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \partial_\zeta \phi_{T,2}(\zeta = 0) = \delta_0(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant les fonctions auxiliaires

$$H_j^\pm = \partial_\zeta \left[e^{\pm i\tau} \left(\phi_{T,j,1} \pm i\phi_{T,j,2}\phi_{T,j,2} \mp i\phi_{T,j,1} \right) \right]$$

et la solution fondamentale de l'équation de la chaleur (voir [9]), on trouve que

$$\phi_{T,1}(s,\zeta) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi s}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4s}\right) \left[e^{-is}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + e^{is}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right],$$
$$\phi_{T,2}(s,\zeta) = \frac{i}{\sqrt{4\pi s}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4s}\right) \left[e^{is}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} - e^{-is}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right].$$

Les noyaux $\phi_{T,j}$ ne sont donc pas intégrables en $s = +\infty$, ce qui pose problème pour la définition du terme $v_{T,h}$; on pose donc, pour $\delta > 0$,

$$v_{T,h}^\delta(\tau, x_h, \zeta; \omega) = -\beta\sqrt{\varepsilon\nu} \sum_{j\in\{1,2\}} \int_0^\infty \delta_{T,j}(\tau - s, x_h; \omega)\phi_{T,j}(s,\zeta) \exp(-\delta s)\, ds. \qquad (21)$$

Les calculs menant à la construction $v_{B,h}$ sont analogues ; on trouve

$$v_{B,h}^\delta(\tau, x_h, \zeta; \omega) = -\sum_{j\in\{1,2\}} \int_0^\infty \delta_{T,j}(\tau - s, x_h; \omega)\phi_{B,j}(s,\zeta) \exp(-\delta s) ds, \quad (22)$$

où

$$\phi_{B,j}(s,\zeta) = \partial_\zeta \phi_{T,j}(s,\zeta) = -\frac{\zeta}{2s}\phi_{T,j}(s,\zeta).$$

Les termes de couches limites ainsi définis ne sont que des solutions approchées de l'équation (10), et vérifient

$$\partial_\tau v_h^\delta + (v_h^\delta)^\perp - \partial_\zeta^2 v_h^\delta = -\delta v_h^\delta. \tag{23}$$

Cependant on peut démontrer le résultat suivant (voir [3]) :

Proposition 3. *On suppose que* $\delta_{T,h}, \delta_{B,h}$ *vérifient les hypothèses* **(H1)-(H2)**, *et on considère les termes de couches limites* $v_{T,h}^\delta, v_{B,h}^\delta$ *donnés par* (21)-(22). *Alors il existe une constante* C *telle que pour tout* $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
\left\| v_{T,h}^\delta \right\|_{L^\infty([0,\infty)_\tau \times \mathbb{T}^2 \times [0,\infty)_\zeta \times E)} &\leq C\beta\sqrt{\varepsilon\nu}, \\
\left\| v_{B,h}^\delta \right\|_{L^\infty([0,\infty)_\tau \times \mathbb{T}^2 \times [0,\infty)_\zeta \times E)} &\leq C, \\
\left\| v_{T,h}^\delta \right\|_{L^\infty([0,\infty) \times \mathbb{T}^2 \times E, L^2([0,\infty)_\zeta)} &\leq C\beta\sqrt{\varepsilon\nu}, \\
\left\| v_{B,h}^\delta \right\|_{L^\infty([0,\infty) \times \mathbb{T}^2 \times E, L^2([0,\infty)_\zeta)} &\leq C
\end{aligned}$$

Par conséquent, le membre de droite de (23) tend vers zéro lorsque $\delta \to 0$ sous les hypothèses du Théorème 2.

Les troisièmes composantes de v_T, v_B sont ensuite imposées par la contrainte de divergence nulle : en posant

$$\varphi(\zeta) = -\int_\zeta^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) du,$$

on a

$$\begin{aligned}
v_{T,3}^\delta(\tau, x_h, \zeta; \omega) &= -\sqrt{\varepsilon\nu}\int_\zeta^\infty \mathrm{div}_h v_{T,h}^\delta(\tau, x_h, u; \omega)\, du \qquad (24)\\
&= -\frac{\beta\varepsilon\nu}{\sqrt{4\pi}}\sum_{+,-}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{s}}\right) e^{\pm is - \delta s}\left[\mathrm{div}_h \delta_{T,h} \mp i\mathrm{rot}_h \delta_{T,h}\right](\tau - s, x_h; \omega) ds
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
v_{B,3}^\delta(\tau, x_h, \zeta; \omega) &= \sqrt{\varepsilon\nu}\int_\zeta^\infty \mathrm{div}_h v_{B,h}^\delta(\tau, x_h, u; \omega)\, du \qquad (25)\\
&= -\frac{\sqrt{\varepsilon\nu}}{\sqrt{4\pi}}\sum_{+,-}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{4s}\right) e^{\pm is - \delta s}\left[\mathrm{div}_h \mp i\mathrm{rot}_h\right]\delta_{B,h}(\tau - s, x_h; \omega) ds.
\end{aligned}$$

L'opérateur $\mathcal{B}^\delta_{\rm stat}$ ($\delta > 0$) est enfin défini par

$$\mathcal{B}^\delta_{\rm stat}[\delta_B, \delta_T] = v_T^\delta\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_h, \frac{a_3 - z}{\sqrt{\varepsilon\nu}}; \omega\right) + v_B^\delta\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_h, \frac{z}{\sqrt{\varepsilon\nu}}; \omega\right),$$

où v_T^δ est donné par (21)-(24), et v_B^δ par (22)-(25).

4 Opérateur intérieur

Cette section est consacrée à la définition d'un opérateur « intérieur » $\mathcal{U}$, tel que

$$\mathcal{U}: \begin{array}{rcl} L^\infty([0,\infty)_t \times [0,\infty)_\tau \times \mathbb{T}^2)^2 \times (V_0 \cap H^{0,1}) & \to & L^\infty_{\rm loc}([0,\infty), V_0 \cap H^{0,1}) \\ (\delta_{B,3}, \delta_{T,3}, u_0) & \mapsto & u^{\rm int}, \end{array}$$

où la fonction $u^{\rm int}$ est une solution approchée de l'équation d'évolution (5) munie de la condition initiale

$$u^{\rm int}_{|t=0} = u_0 + o(1),$$

et $u^{\rm int}$ vérifie les conditions aux bords

$$\begin{aligned} u^{\rm int}_{3|z=0}(t, x_h) &= \sqrt{\varepsilon\nu}\,\delta_{B,3}\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, x_h\right), \\ u^{\rm int}_{3|z=a_3}(t, x_h) &= \sqrt{\varepsilon\nu}\,\delta_{T,3}\left(t, \frac{t}{\varepsilon}, x_h\right). \end{aligned} \tag{26}$$

On suppose que les fonctions $\delta_{B,3}$ et $\delta_{T,3}$ ci-dessus sont presque périodiques ou stationnaires aléatoires par rapport à la variable rapide de temps τ, et qu'il existe $s > 1$ tel que

$$\|\delta_{T,3}\|_{L^\infty([0,\infty)\times[0,\infty), H^s(\mathbb{T}^2)))} + \|\delta_{B,3}\|_{L^\infty(H^s([0,\infty)\times[0,\infty), \mathbb{T}^2))} = o((\varepsilon\nu)^{-1/2}). \tag{27}$$

En général, la fonction $u^{\rm int}$ n'est pas définie de façon univoque par les conditions (26). On donne ici une construction explicite de $u^{\rm int}$, sous la forme

$$u^{\rm int} = \bar{u}^{\rm int} + v^{\rm int} + \delta u^{\rm int},$$

où $\bar{u}^{\rm int}$ est le terme dominant, $v^{\rm int}$ vérifie les conditions (26), et $\delta u^{\rm int}$ est défini de façon à ce que $u^{\rm int}$ soit solution approchée de (5). Un choix possible pour $v^{\rm int}$ est

$$\left\{ \begin{aligned} v_3^{\rm int}(t) &= \frac{\sqrt{\varepsilon\nu}}{a_3}\left[\delta_{T,3}\left(t, \frac{t}{\varepsilon}\right) z + \delta_{B,3}\left(t, \frac{t}{\varepsilon}\right)(a_3 - z)\right], \\ v_h^{\rm int}(t) &= \frac{\sqrt{\varepsilon\nu}}{a_3}\nabla_h \Delta_h^{-1}\left[\delta_{B,3}\left(t, \frac{t}{\varepsilon}\right) - \delta_{T,3}\left(t, \frac{t}{\varepsilon}\right)\right]. \end{aligned} \right. \tag{28}$$

D'après l'hypothèse (27), $v^{\text{int}} = o(1)$ dans $L^\infty([0,\infty)\times\mathbb{T}^2\times[0,a_3])$. Toutefois, comme les conditions aux bords $\delta_{B,3}, \delta_{T,3}$ sont fortement oscillantes, v^{int} n'est pas une solution approchée de l'équation (10) ; on pose donc

$$\Sigma = \partial_t v^{\text{int}} + \frac{1}{\varepsilon} e_3 \wedge v^{\text{int}}.$$

Par ailleurs, on a vu qu'il était naturel de chercher $\bar{u}^{\text{int}}$ sous la forme

$$\bar{u}^{\text{int}}(t) = \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}L\right)\bar{u}_L(t) = \sum_k e^{-i\lambda_k \frac{t}{\varepsilon}} c_k(t) N_k,$$

où $c_k = \langle N_k, \bar{u}_L\rangle$. De même, on écrit

$$\delta u^{\text{int}}(t) = \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}L\right)\delta u_L^{\text{int}}(t) = \sum_k e^{-i\lambda_k \frac{t}{\varepsilon}} \delta c_k(t) N_k.$$

On obtient ensuite une équation sur $\bar{u}_L + \delta u_L^{\text{int}}$ en imposant que

$$\mathbb{P}\left[\partial_t u^{\text{int}} + \frac{1}{\varepsilon} e_3 \wedge u^{\text{int}} + \bar{u}^{\text{int}} \cdot \nabla \bar{u}^{\text{int}} - \Delta_h \bar{u}^{\text{int}}\right] = 0.$$

Pour la preuve du Théorème 1, on utilise la même équation, mais sans le terme quadratique $\bar{u}^{\text{int}} \cdot \nabla \bar{u}^{\text{int}}$; on rappelle par ailleurs que $v^{\text{int}}, \delta u^{\text{int}} = o(1)$ par hypothèse. En composant l'égalité ci-dessus par $\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}L\right)$, on obtient

$$\partial_t(\bar{u}_L + \delta u_L^{\text{int}}) + Q\left(\frac{t}{\varepsilon}, \bar{u}_L, \bar{u}_L\right) - \Delta_h \bar{u}_L = -\exp\left(\frac{t}{\varepsilon}L\right)\mathbb{P}\left[\Sigma(t)\right], \tag{29}$$

où

$$Q(\tau, w, w) = \exp(\tau L)\mathbb{P}\left((\exp(-\tau L)w) \cdot \nabla(\exp(-\tau L)w)\right).$$

On munit (29) des conditions initiales

$$\bar{u}^{\text{int}}_{L|t=0} = u_0,$$
$$\delta u^{\text{int}}_{L|t=0} = 0.$$

L'équation sur $\bar{u}_L$ provient du filtrage des termes fortement oscillants dans l'équation (29) ; précisément, on pose

$$\partial_t \bar{u}_L + \bar{Q}(\bar{u}_L, \bar{u}_L) - \Delta_h \bar{u}_L + \bar{S}[\delta_{B,3}, \delta_{T,3}] = 0, \tag{30}$$

où

$$\bar{S}[\delta_{B,3}, \delta_{T,3}] = \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \exp(\tau L)\mathbb{P}\Sigma(\tau)\, d\tau.$$

L'expression explicite de $\bar{S}$ en fonction des coefficients de Fourier de $\delta_{B,3}, \delta_{T,3}$ peut être calculée grâce à la définition de v^{int} dans (28) ; dans le cas stationnaire, la convergence lorsque $\theta \to \infty$ du membre de droite est une conséquence du théorème ergodique (voir [3]).

En rassemblant (29) et (30), on obtient enfin une équation sur δu_L^{int}, qui permet de montrer que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\},\ \delta c_k(t) = o(1) \quad \text{dans } L^\infty_{\text{loc}}([0,\infty)).$$

On vérifie *a posteriori* qu'avec les définitions précédentes, u^{int} est bien une solution approchée de (5) (ou de (10) pour le Théorème 1) munie des conditions aux bords (26).

5 Preuve de convergence

On esquisse ici les principales étapes des preuves des Théorèmes 1 et 2. Les deux démonstrations étant assez techniques, on renvoie le lecteur intéressé à [3, 4] pour les détails. L'idée générale est de bâtir une solution approchée de l'équation (10) ou de (5), munie des conditions aux bords (6) ; cette solution approchée est composée de termes intérieurs et de termes de couches limites, obtenus à l'aide des opérateurs $\mathcal{B}_{\text{pér}}, \mathcal{B}^\delta_{\text{stat}}$ et $\mathcal{U}$ définis dans les sections précédentes. Soulignons que l'obtention d'une solution approchée à un ordre suffisant nécessite de construire plusieurs correcteurs successifs. En particulier, l'existence de couches limites atypiques (Théorème 1) conduit à définir trois ordres de correcteurs dans la couche limite, et autant à l'intérieur.

5.1 Construction d'une solution approchée

• Tout d'abord, le terme principal est déterminé en spécifiant les valeurs des conditions aux bords δ_B, δ_T, ce qui fait apparaître un couplage entre le terme de bord $u^{\text{BL}} = \mathcal{B}[\delta_{B,h}, \delta_{T,h}]$ et le terme intérieur $u^{\text{int}} = \mathcal{U}[\gamma, \delta_{B,3}, \delta_{T,3}]$. En effet, afin que les conditions (6) soient vérifiées à l'ordre principal, les composantes horizontales de δ_B, δ_T doivent satisfaire

$$\begin{aligned} \delta_{B,h} &= -\bar{u}_h^{\text{int}}, \\ \delta_{T,h} &= \sigma. \end{aligned}$$

Le terme de couche limite u^{BL} est alors défini de façon univoque en fonction de $\bar{u}_L$. Les composantes verticales de δ_B, δ_T sont dictées par les relations

$$u^{\text{BL}}_{3|z=0} + u^{\text{int}}_{3|z=0} = 0,$$
$$u^{\text{BL}}_{3|z=a_3} + u^{\text{int}}_{3|z=a_3} = 0,$$

d'où l'on déduit, avec les notations de la section 3,

$$\delta_{B,3}(t,\tau,x_h) = -\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^3,\\ k_h\neq 0}}\sum_{+,-} e^{-i\lambda_k\tau}e^{ik'_h\cdot x_h}\frac{\alpha_B^\pm(-\lambda_k,k_h)ik'_h\cdot w^\pm(-\lambda_k,k_h)}{\lambda^\pm(-\lambda_k,k_h)}$$

ainsi que

$$\delta_{T,3}(t,\tau,x_h) = \beta\sqrt{\varepsilon\nu}\sum_{\mu,k_h}\sum_{+,-} e^{i\mu\tau}e^{ik'_h\cdot x_h}\mathbf{1}_{k_h\neq 0}\frac{\alpha_T^\pm(\mu,k_h)ik'_h\cdot w^\pm(\mu,k_h)}{(\lambda^\pm(\mu_k,k_h))^2}$$

si σ est presque périodique, et

$$\delta_{T,3} = -\sqrt{\varepsilon\nu}\beta\sum_\pm\int_0^\infty \exp(-\delta s)(\mathrm{div}_h\sigma \mp i\mathrm{rot}_h\sigma)(\cdot,\tau-s,\cdot,\omega)e^{\pm is}ds$$

dans le cas stationnaire.

• Ainsi, $\delta_{B,3}$ dépend explicitement de $\bar{u}_L$ à travers les coefficients $\alpha_B^\pm(-\lambda_k,k_h)$. En injectant ces expressions dans (30) et en négligeant les termes $o(1)$, on obtient l'équation (11) dans le cas du Théorème 1 et (12) pour le Théorème 2. Le terme de pompage $S_{\mathrm{Ekman}}(\bar{u}_L)$ provient de la dépendance de $\bar{S}$ en $\delta_{B,3}$, et le terme source $S_{\mathrm{surface}}(\sigma)$ dans (12) de la dépendance en $\delta_{T,3}$. D'autre part, dans le cas stationnaire, les hypothèses **(H1)-(H2)** permettent de passer à la limite lorsque $\delta\to 0$ dans $\bar{S}[\delta_{B,3},\delta_{T,3}]$. Les calculs menés dans [3] conduisent à

$$S_{\mathrm{surface}}(\sigma) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^3,\\ k_h\neq 0}}\frac{(-1)^{k_3}}{|k'_h|}\left[\lambda_k k'_h\cdot\bar{\sigma}^{k_h}(-\lambda_k,t;\omega) - i(k'_h)^\perp\cdot\bar{\sigma}^{k_h}(-\lambda_k,t;\omega)\right]N^k, \quad (31)$$

où

$$\bar{\sigma}^{k_h}(\mu,t;\omega) = \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}\int_0^\theta\int_{\mathbb{T}^2} e^{-ik'_h\cdot x_h - i\mu\tau}\sigma(t,\tau,x_h;\omega)\,d\tau\,dx_h.$$

• Une fois les termes principaux u^{BL} et u^{int} définis, on vérifie que les traces

$$\partial_z(u^{\mathrm{BL}}+u^{\mathrm{int}})_{h|z=a_3},\quad (u^{\mathrm{BL}}+u^{\mathrm{int}})_{3|z=a_3},\quad (u^{\mathrm{BL}}+u^{\mathrm{int}})_{3|z=0}$$

sont toutes exponentiellement petites, ce qui est compatible avec la Proposition 4 ci-après. En revanche,

$$(u^{\mathrm{BL}}+u^{\mathrm{int}})_{h|z=0} = v^{\mathrm{int}}_{h|z=0} + \delta u^{\mathrm{int}}_{h|z=0}$$

ne vérifie pas les hypothèses de la Proposition 4, et il faut donc construire un nouveau terme de couche limite, soit δu^{BL}, qui rétablit la condition de Dirichlet au fond. En raison de la contrainte de divergence nulle sur le terme δu^{BL}, la condition de Dirichlet sur la composante verticale du flux n'est alors plus vérifiée en $z = 0$, et il faut également construire un terme correcteur à l'intérieur. On laisse de côté la définition de ces termes additionnels, et on renvoie à [3, 4] pour tous les détails.

5.2 Estimations d'énergie

La différence entre la solution approchée et la solution $u^{\varepsilon,\nu}$ de (5)-(6) (ou de (10)-(6)) est ensuite évaluée au moyen d'une méthode d'énergie. Pour le Théorème 1, on utilise la Proposition suivante :

Proposition 4. *On suppose que σ n'a qu'un nombre fini de modes de Fourier, et que $\langle u_0, N_k\rangle = 0$ pour $|k_h|$ assez grand.*

Soit $u^{\varepsilon,\nu}$ la solution de (10)-(6)*, et soit u^{app} une solution approchée vérifiant les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} \partial_t u^{app} + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}(e_3 \wedge u^{app}) - \Delta_h u^{app} - \nu\partial_{zz}u^{app} = \eta, \\ \nabla \cdot u^{app} = 0, \\ u^{app}_{|t=0} = u_0 + \eta_0, \\ u^{app}_{3|z=0} = \varepsilon\eta_{B,3}, \quad u^{app}_{h|z=0} = \varepsilon\eta_{B,h}, \\ u^{app}_{3|z=a_3} = \varepsilon\eta_{T,3}, \quad \partial_z u^{app}_{h|z=a_3} = \beta\sigma + \eta_{T,h}, \end{aligned} \tag{32}$$

où $\eta \to 0$ dans $L^2([0,T] \times \mathbb{T}^2 \times (0,a_3))$, $\eta_0 \to 0$ dans $L^2(\mathbb{T}^2 \times (0,a_3))$ et

$$\eta_B,\ \nu^{3/4}\eta_{T,h},\ \eta_{T,3},\ \varepsilon\partial_t\eta_B,\ \varepsilon\partial_t\eta_{T,3} \to 0 \quad \text{dans } L^2([0,T] \times \mathbb{T}^2).$$

On suppose de surcroît que η_B, η_T n'ont qu'un nombre fini de modes de Fourier horizontaux.

Alors lorsque $\varepsilon, \nu \to 0$,

$$\begin{aligned} \|u^{\varepsilon,\nu} - u^{app}\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{T}^2\times(0,a_3)))} \to 0, \\ \|\nabla_h(u^{\varepsilon,\nu} - u^{app})\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{T}^2\times(0,a_3))} \\ +\sqrt{\nu}\|\partial_z(u^{\varepsilon,\nu} - u^{app})\|_{L^2([0,T]\times\mathbb{T}^2\times(0,a_3))} \to 0. \end{aligned}$$

Pour le Théorème 2, on utilise une variante non linéaire de la Proposition 4, qui repose sur l'observation que la solution approchée construite à l'aide des opérateurs $\mathcal{U}$ et $\mathcal{B}$ est très régulière. On peut donc utiliser un principe d'unicité « fort-faible »pour l'équation (5), et conclure.

Références

[1] A. Babin, A. Mahalov, and B. Nicolaenko, *Integrability and regularity of 3D Euler and equations for uniformly rotating fluids*, Comput. Math. Appl. **31** (1996), no. 9, 35–42.

[2] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, and E. Grenier, *Mathematical geophysics*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 32, The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2006, An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations.

[3] A.-L. Dalibard, *Asymptotic behavior of a rapidly rotating fluid with random stationary surface stress*, en préparation, 2008.

[4] A.-L. Dalibard and L. Saint-Raymond, *Mathematical study of resonant wind-driven oceanic motions*, preprint hal-00258519, soumis, 2008.

[5] B. Desjardins and E. Grenier, *On the homogeneous model of wind-driven ocean circulation*, SIAM J. Appl. Math. **60** (2000), no. 1, 43–60 (electronic).

[6] A.E. Gill, *Atmosphere-Ocean dynamics*, International Geaophysics series, vol. 4, 1982.

[7] E. Grenier, *Oscillatory perturbations of the Navier-Stokes equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **76** (1997), no. 6, 477–498.

[8] E. Grenier and N. Masmoudi, *Ekman layers of rotating fluids, the case of well prepared initial data*, Comm. Partial Differential Equations **22** (1997), no. 5-6, 953–975.

[9] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic type*, American Mathematical Society, 1968.

[10] N. Masmoudi and F. Rousset, *Stability of oscillating boundary layers in rotating fluids*, Prépublication, 2007.

[11] Nader Masmoudi, *The Euler limit of the Navier-Stokes equations, and rotating fluids with boundary*, Arch. Rational Mech. Anal. **142** (1998), no. 4, 375–394.

[12] ———, *Ekman layers of rotating fluids : the case of general initial data*, Comm. Pure Appl. Math. **53** (2000), no. 4, 432–483.

[13] G. Papanicolaou and S. R. S. Varadhan, *Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients*, Rigorous results in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory (J. Fritz, J. L. Lebaritz, and D. Szasz, eds.), Proc. Colloq. Random Fields, vol. 10, Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 1979, pp. 835–873.

[14] J. Pedlosky, *Geophysical fluid dynamics*, Springer, 1979.

[15] ———, *Ocean Circulation theory*, Springer, 1996.

[16] Steven Schochet, *Fast singular limits of hyperbolic PDEs*, J. Differential Equations **114** (1994), no. 2, 476–512.