SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2005-2006

Serge Alinhac

Solutions explosives exceptionnelles

Séminaire É. D. P. (2005-2006), Exposé n° XIX, 10 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2005-2006____A19_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Solutions explosives exceptionnelles

d'équations d'ondes quasi-linéaires

par S. Alinhac

Introduction

Nous considérons des équations d'ondes quasi-linéaires dans $\mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_t$

$$P(u) = \Sigma p_{ij}(\partial u)\partial_{ij}^2 u = F(u, \partial u).$$

Etant donnée une solution u dans un voisinage de l'origine dans $\{t \leq 0\}$, suffisamment régulière pour qu'on puisse parler de la géométrie des caractéristiques de l'opérateur près de zéro, nous posons la question de son comportement à l'origine. Si la solution explose en zéro, de quelle façon, à quelle vitesse ?

A notre connaissance, ces questions n'ont été résolues [18], [19], [20] que dans le cas d'équations

$$(\partial_t^2 - \Delta_x)u = F(u),$$

un cas où l'on discute, bien sûr, l'explosion de u elle-même. Même dans le cas où l'équation contient des termes en gradient

$$(\partial_t^2 - \Delta_x)u = F(\partial_x u, \partial_t u),$$

la réponse n'est pas connue, et de nouveaux phénomènes semblent apparaitre (voir [9] pour l'étude numérique d'un exemple).

Dans cet exposé, nous montrons, en nous limitant au cas $F \equiv 0$ et $u \in C^1$, comment on peut construire des solutions explosives exceptionnelles de $P(u) = 0$, ainsi que leur instabilité.

1. Le mode d'explosion "générique" et les valeurs propres vraiment non-linéaires

Rappelons tout d'abord la situation pour des systèmes quasi-lin éaires du premier ordre en 1D

$$\partial_t u + A(u)\partial_x u = 0.$$

On suppose ici comme d'habitude que les valeurs propres de A sont r éelles et simples

$$\lambda_1(u) < \ldots < \lambda_N(u),$$

associées à des vecteurs propres $r_1(u), \ldots, r_N(u)$.

Pour une loi scalaire, $v = \partial_x u$ vérifie

$$(\partial_t + A(u)\partial_x)v + A'(u)v^2 = 0.$$

Si $A'(u) \neq 0$ et v explose au temps T, alors elle explose comme $(T-t)^{-1}$, comme on le voit en appliquant la méthode des caractéristiques.

Pour un système, le concept correspondant est celui de valeur propre vraiment non-linéaire au sens de Lax [14]

$$r_j(u).\nabla_u \lambda_j(u) \neq 0.$$

Si une telle valeur propre existe, il est possible de construire des solutions u du système pour lesquelles ∂u explose en $(T-t)^{-1}$, comme dans le cas scalaire. Dans le cas multidimensionnel

$$\partial_t u + \Sigma A_j(u)\partial_j u = 0,$$

on considère les valeurs propres $\lambda_j(u,\xi)$ et les vecteurs propres $r_j(u,\xi)$ de $A(u,\xi) = \Sigma A_j(u)\xi_j$, et les conclusions sont les mêmes (voir [3]). Remarquons en outre que le taux d'explosion du gradient de u ne peut être inférieur à $(T-t)^{-1}$, comme expliqué dans [6]. En d'autres termes, les solutions qui explosent avec le taux minimum semblent associées à des valeurs propres vraiment non lin éaires. C'est une *question ouverte* de savoir si, pour un système strictement hyperbolique dont toutes les valeurs propres sont vraiment non linéaires, il existe des solutions dont les gradients explosent plus vite que $(T-t)^{-1}$.

Dans quels cas existe-t-il des solutions dont les gradients explosent plus vite que $(T-t)^{-1}$? Pour une loi scalaire 1D, u est constante le long de chaque caractéristique : si $A'(u) = 0$, il n'y a pas d'explosion du tout ! Pour un système 2×2 diagonal, nous avons

$$(\partial_t + \lambda_1(u)\partial_x)(\partial_x u_1) + (\partial_1\lambda_1)(\partial_x u_1)^2 + (\partial_2\lambda_1)(\partial_x u_1)(\partial_x u_2) = 0,$$

et le dernier terme est sans importance. Si λ_1 n'est pas vraiment non-linéaire, il est possible de s'arranger pour que $\partial_1\lambda_1$ s'annule le long de la caractéristique en $t = T$, auquel cas $\partial_x u_1$ explosera comme $(T-t)^{-2}$. En effet, l'équation différentielle $y' + cty^2 = 0$ admet la solution $y = 2/(ct^2)$ (le paradoxe est que plus la non-lin éarité de l'équation est faible, plus les solutions explosives sont singulières !). C'est une construction de ce type que nous allons présenter ici.

2. Equations d'ondes quasi-linéaires : présentation du cadre et exemples

Pour simplifier, nous nous restreignons au cas $n = 2$, renvoyant le lecteur à [8] pour le cas 1D. Les variables et les variables duales sont donc

$$x = (x_1, x_2, x_3), y = x_2, t = x_3, \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \eta = \xi_2, \tau = \xi_3,$$

et l'équation d'ondes quasi-linéaire s'écrit

$$P(u) = \Sigma_{1 \leq i,j \leq 3} p_{ij}(\partial u)\partial^2_{ij} u = 0, p_{ij} = p_{ji}, p_{33} = 1,$$

où $\partial u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \partial_3 u)$, et tous les coefficients sont réels. Notant

$$p(\partial u; \xi) = \Sigma p_{ij}(\partial u)\xi_i \xi_j$$

le symbole de P, nous supposons qu'il existe un point $(\overline{\partial u}, \bar{\xi}), \bar{\xi}_1 = -1$, tel que

$$p(\overline{\partial u}; \bar{\xi}) = 0, (\partial_\tau p)(\overline{\partial u}; \bar{\xi}) \neq 0.$$

De plus, nous supposons que l'opérateur gelé

$$\Sigma p_{ij}(\overline{\partial u})\partial^2_{ij}$$

est strictement hyperbolique dans la direction t.

Dans ce cadre, la condition qui remplace "la valeur propre est vraiment non-linéaire" s'écrit

$$(\bar{\xi}.D)p(\overline{\partial u}; \bar{\xi}) \neq 0, D_j = \partial_{(\partial_j u)}.$$

Comme nous sommes en dimension deux, c'est bien entendu une notion microlocale. Si au contraire $(\bar{\xi}.D)p = 0$, nous dirons que le point est linéairement dégénéré. L'existence de tels points n'a rien d'exceptionel, comme le montrent les exemples suivant :

Exemple 1 : Soit

$$P(u) = \partial^2_t u - \Delta u + a\partial^2_1 u + 2b\partial^2_{12} u + c\partial^2_2 u,$$

où les coefficients sont fonctions de $(\partial_1 u, \partial_2 u)$ seulement. La condition de linéaire dégénérescence s'écrit

$$\mu^3 D_1 a + \mu^2(2D_1 b + D_2 a) + \mu(D_1 c + 2D_2 b) + D_2 c = 0, \mu = \xi/\eta.$$

Pour $\overline{\partial u}$ donné, on voit qu'on peut toujours trouver une direction appropriée.

Exemple 2 : Dans l'exemple précédent, supposons que les coefficients ne dépendent que de $\partial_t u$. Si l'équation

$$\mu^2 D_3 a + 2\mu D_3 b + D_3 c = 0$$

n'a pas de racine réelle, il n'y a pas de point linéairement dég énéré.

Le dernier exemple suggère la question ouverte suivante, qui est l'analogue de celle posée ci-dessus pour les systèmes : supposons que tous les points caractéristiques soient vraiment non linéaires ; est-il vrai qu'alors les dérivées secondes de toutes les solutions du type considéré explosent comme t^{-1} à l'origine ?

3. Le résultat principal

Nous faisons maintenant l'hypothèse que les coefficients p_{ij} de l'équation sont *analytiques* au point considéré. Comme on le verra, cette hypothèse semble purement technique, mais...sait-on jamais ? Nous énonçons le résultat principal, que nous commenterons ensuite.

Théorème. *Supposons qu'au point donné $(\overline{\partial u}, \bar{\xi})$, $\partial_\eta p \neq 0$, et qu'une des trois quantités suivantes ne soit pas nulle :*

$$-(D_2 p)((\bar{\xi}D)\partial_\eta p + D_2 p) - 1/2(\partial^2_\eta p)(\bar{\xi}D)^2 p + (\partial_\eta p)(\bar{\xi}D)D_2 p,$$

$$-(D_3 p)((\bar{\xi}D)\partial_\eta p + D_2 p) - (D_2 p)((\bar{\xi}D)\partial_\tau p + D_3 p) -$$
$$-(\partial^2_{\tau\eta} p)(\bar{\xi}D)^2 p + (\partial_\tau p)(\bar{\xi}D)D_2 p + (\partial_\eta p)(\bar{\xi}D)D_3 p,$$

$$-(D_3 p)((\bar{\xi}D)\partial_\tau p + D_3 p) - (\bar{\xi}D)^2 p + (\partial_\tau p)(\bar{\xi}D)D_3 p.$$

Il existe alors

a. *Un domaine D défini par*

$$-t_1 \leq t \leq t_2, x_1^2 + x_2^2 \leq (R - kt)^2, t_1 > 0, t_2 > 0, R > 0, k > 0.$$

On appelle $t = -t_1, ||(x_1, x_2)|| \leq R + kt_1$ la base de D.

b. *Une famille de solutions u^ϵ (dependant continument de ϵ ainsi que leurs dérivées), définies pour ϵ voisin de zéro et telles que*

i) *Pour $\epsilon = 0$, soit*

$$D_0 = D \cap \{t < 0\}.$$

Alors $u^0 \in C^1(\bar{D}_0)$, u^0 est analytique dans $\bar{D}_0$ hors de l'origine, D_0 est un domaine d'influence de sa base, et $\partial^2 u^0$ explose à l'origine comme $(-t)^{-2}$.

ii) *Pour $\epsilon > 0$, u^ϵ est définie et analytique dans D,*

iii) *Pour $\epsilon < 0$ et un $t_\epsilon < 0$, soit*

$$D_\epsilon = D \cap \{t < t_\epsilon\}.$$

Alors $u^\epsilon \in C^1(\bar{D}_\epsilon)$, u^ϵ est analytique dans $\bar{D}_\epsilon$ hors de l'origine, D_ϵ est un domaine d'influence de sa base, et $\partial^2 u^\epsilon$ explose en un point $m_\epsilon = (p_\epsilon, t_\epsilon)$, proche de zéro, comme $(t_\epsilon - t)^{-1}$ (plus précisément, m_ϵ est un point d'explosion géométrique de type cusp, selon la terminologie de [2], [3]).

Remarque 1 : Dans le cas $\epsilon = 0$ du Théorème, l'explosion est précisément décrite comme suit :

$$\partial^2_{ij} u(x) = (C(x)/d(x))\xi_i(x)\xi_j(x) + R, R \in C^0,$$

avec, pour une constante $c > 0$,

$$C(0) \neq 0, \xi(0) = \bar{\xi}, d \geq ct^2,$$

tandis que $d \sim t^2$ sur une certaine courbe aboutissant en zéro. Il s'agit d'une explosion géométrique de rang 1.

Remarque 2 : Dans le cas $\epsilon < 0$ du Théorème, l'explosion observée est *stable*, comme on l'a montré dans [5] dans le contexte plus général des systèmes quasi-lin éaires symétriques.

Remarque 3 : On ne sait pas décrire quelles modifications des données de Cauchy sur $t = -t_1$ conduisent à quelles singularités de la solution. Ce que nous montrons est que *certaines modifications* des données font disparaitre la singularité, tandis que *d'autres* transforment cette singularit é en une singularité générique stable.

Remarque 4 : Il est possible aussi de construire des solutions exceptionnelles *de rang deux*, au sens de [7]. Les détails seront peut-être publiés un jour...

La situation est analogue à ce qui se passe pour l'équation de Schrödinger avec une non-linéarité critique : diverses constructions de solutions explosant comme t^{-1} ont été donn ées [10], [16]. Cependant, il a été prouvé dans [17] que le taux minimum d'explosion est $(t/\log|\log t|)^{-1/2}$, et diverses solutions explosant avec ce taux ont été construites [21], [22]. De plus, les solutions qui explosent avec le taux minimal sont stables [22], ce qui n'est pas le cas des solutions en t^{-1}.

Enfin, bien que nous ne prétendions pas que les hypothèses du Th éorème soient optimales, il faut noter qu'une condition “de convexité” (ie, portant sur les dérivées secondes de p) est certainement nécessaire pour ce type de construction (de telles conditions apparaissent aussi dans [7]). Cela conduit à la *question ouverte* suivante : existe-t-il des solutions de l'équation

$$\partial^2_t u - \Delta u + (\partial_1 u)\partial^2_2 u - (\partial_2 u)\partial^2_{12} u = 0$$

dont les dérivées secondes explosent ? La particularité de cette équation est que $(\xi.D)p$ est *identiquement nulle* : les trois quantités mentionnées dans le Théorème sont donc nulles, et nous n'avons aucun r ésultat. Bien entendu, on reconnait ici un exemple typique de termes non linéaires vérifiant la "condition nulle", qui joue un rôle important dans l'étude des petites solutions (voir [11], [12], [13]).

5. Quelques idées sur la construction des solutions

Bien que cette construction ne soit en fait pas difficile, elle est un peu technique, c'est pourquoi nous n'indiquerons ici que les idées directrices, renvoyant le lecteur à [8] pour les d étails.

a. La méthode générale

C'est la méthode de l'explosion géométrique [1], [2], [3], dans sa variante de [4]. Elle consiste à introduire un changement de variables Φ (dépendant d'une fonction inconnue ϕ)

$$(s, y, t) \mapsto (x_1 = \phi(s, y, t), y, t),$$

puis à poser

$$w(s, y, t) = u(\phi(s, y, t), y, t), v(s, y, t) = (\partial_1 u)(\phi(s, y, t), y, t).$$

Cela implique bien évidemment l'équation auxiliare

$$\mathcal{A} \equiv w_s - v\phi_s = 0.$$

En utilisant les notations

$$\bar{\partial} = (0, \partial_y, \partial_t), \hat{\phi} = (-1, \phi_y, \phi_t),$$

on établit facilement les formules

$$(\partial u)(\Phi) = \bar{\partial} w - v\hat{\phi},$$

$$(\partial^2_{ij} u)(\Phi) = \bar{\partial}^2_{ij} w - v\bar{\partial}^2_{ij}\phi - (\hat{\phi}_i\bar{\partial}_j v + \hat{\phi}_j\bar{\partial}_i v) + \hat{\phi}_i\hat{\phi}_j(v_s/\phi_s).$$

En notant alors

$$\mathcal{E} \equiv \Sigma p_{ij}(v, w_y - v\phi_y, w_t - v\phi_t)\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j,$$

$$\mathcal{R} \equiv \Sigma p_{ij}(v, w_y - v\phi_y, w_t - v\phi_t)[\bar{\partial}^2_{ij} w - v\bar{\partial}^2_{ij}\phi - (\hat{\phi}_i\bar{\partial}_j v + \hat{\phi}_j\bar{\partial}_i v)],$$

nous voyons que

$$(P(u))(\Phi) = \frac{\mathcal{E}}{\phi_s} + \mathcal{R}.$$

Nous associons donc à P le "système éclaté' " sur (ϕ, v, w)

$$\mathcal{A} = 0, \mathcal{E} = 0, \mathcal{R} = 0.$$

Remarquons que la seconde équation est l'équation eikonale, qui s'écrit plus agréablement

$$\phi_t = \lambda(v, w_y - v\phi_y, w_t - v\phi_t; -1, \phi_y),$$

où $\lambda(\partial u; \xi_1, \xi_2)$ est la racine (réelle) simple de p qui prolonge $\bar{\xi}_3$ au voisinage du point considéré.

Notre but est de trouver une solution régulière (en fait, ici, analytique) du système éclaté, pour laquelle $\phi_s = 0$ quelque part près de l'origine (nous choisirons en fait l'origine pour $\epsilon = 0$, tandis que pour $\epsilon < 0$ le point sera d'ordonnée $t_\epsilon < 0$). Bien entendu, le système éclaté n'est pas très sympathique, et les directions des axes des t et des s sont caract éristiques. C'est pourquoi nous faisons une rotation

$$T = s + t, S = t - s, y = y, \partial_t = \partial_T + \partial_S, \partial_s = \partial_T - \partial_S.$$

Il s'avère alors que, en introduisant comme inconnues les fonctions

$$\phi_S, \phi_y, w_S, w_y,$$

le nouveau système apparait comme un système du premier ordre en $v, \phi_S, \phi_y, w_S, w_y$, résolu par rapport aux dérivées en T, et pour lequel la direction T est non caractéristique. C'est à ce système que l'on applique le théorème de Cauchy-Kovalevsky, pour des données polynomiales convenables sur $T = 0$.

Tout le problème est donc dans le choix des jets à l'origine des données. Pour comprendre (dans le cas $\epsilon = 0$) comment on construit la solution "très" explosive, il faut dériver l'équation eikonale : on obtient (dans les variables d'origine)

$$\phi_{st} = v_s\Lambda + (D_2\lambda)(w_{ys} - v\phi_{ys}) + (D_3\lambda)(w_{st} - v\phi_{st}) + (\partial_\eta\lambda)\phi_{ys},$$

où l'on a posé

$$\Lambda = D_1\lambda - \phi_y D_2\lambda - \phi_t D_3\lambda.$$

Compte tenu de l'équation auxiliaire, on trouve

$$\phi_{st} = v_s\Lambda + *\phi_s + (\partial_\eta\lambda)\phi_{ys},$$

où $*$ est un coefficient sans importance. Comme on choisit à l'origine $\phi_y = \bar{\xi}_2, \phi_t = \bar{\xi}_3$, on voit que Λ n'est autre que $-(\bar{\xi}.D)\lambda$! Dans le cas d'un point vraiment non linéaire, $\Lambda \neq 0$, et $\phi_{st} \neq 0$ au point où $\phi_s = 0$. Le comportement de $\phi_s$dans ce cas est donc, en gros

$$\phi_s = -t + s^2 + y^2,$$

et l'explosion résultante est en $(-t)^{-1}$. Dans le cas $\Lambda \equiv 0$, on a une équation différentielle sur ϕ_s, et $\phi_s = 0$ a lieu tout le long de la courbe int égrale passant par l'origine : il s'agit alors d'une propagation de singularité pour u, pas d'une explosion. Dans le cas présent d'un point linéairement dégénéré, on a necessairement $\phi_{st} = 0$ là où $\phi_s = 0$, mais on peut s'arranger pour avoir en gros

$$\phi_s = s^2 + t^2 + y^2.$$

L'explosion résultante sera alors en t^{-2}.

Pour construire la famille des u^ϵ, on va prendre tout simplement $\phi_s = \epsilon$ à l'origine, en s'arrangeant pour que le hessien de ϕ_s soit défini positif. On a alors en gros

$$\phi_s = \epsilon + s^2 + y^2 + t^2.$$

Pour $\epsilon > 0$, ϕ_s ne s'annule pas et l'on n'a pas d'explosion ; pour $\epsilon < 0$, le point d'ordonnée minimum où $\phi_s = 0$ est $M_\epsilon = (0, 0, -(-\epsilon)^{1/2})$, et en ce point $\phi_{st} < 0$. L'image de M_ϵ par Φ est le point m_ϵ où se produit l'explosion "générique".

Bibliographie

[1] Alinhac S., *"Blowup for Nonlinear Hyperbolic Equations"*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 17, Birkhäuser Boston, Boston MA, (1995).
[2] Alinhac S., *" A minicourse on global existence and blowup of classical solutions to multidimensional quasilinear wave equations"*, Journées "Equations aux Dérivées partielles" (Forges les Eaux, 2002). Université de Nantes, Nantes, 2002. www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa.
[3] Alinhac S., *"Explosion géométrique pour des systèmes quasi-linéaires"*, Amer. J. Math. 117, (1995), 987-1017.
[4] Alinhac S., *"Blowup of small data solutions for a class of quasilinear wave equations in two space dimensions, II"*, Acta Math. 182, (1999), 1-23.
[5] Alinhac S., *"Stability of geometric blowup"*, Arch. Rat. Mech. Analysis 150, (1999), 97-125.
[6] Alinhac S., *"Remarks on the blowup rate of classical solutions to quasilinear multidimensional hyperbolic systems "*, J. Math. Pure Appl. 79, (2000), 839-854.
[7] Alinhac S., *"Rank two singular solutions for quasilinear wave equations"*, Inter. Math. Res. Notices 18, (2000), 955-984.
[8] Alinhac S., *"Exceptional Blowup Solutions to Quasilinear Wave Equations I and II"*, Int. Math. Res. Notices, (2006) et preprint Orsay, (2006).
[9] Alinhac S., *"A Numerical Study of Blowup for Wave Equations with Gradient Terms"*, preprint, Orsay, (2006).
[10] Bourgain J., Wang W., *"Construction of blowup solutions for the nonlinear Schödinger equation with critical nonlinearity"*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sc. 25, (1997), 197-215.
[11] Hörmander L., *"Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations"*, Math. Appl. 26, Springer Verlag, Berlin, (1997).
[12] John F., *" Nonlinear Wave Equations, Formation of singuarities"*, Univ. Lecture Ser. 2, Amer. Math. Soc. , Providence, RI, (1990).
[13] Klainerman S., *"The null condition and global existence to nonlinear wave equations"*, in Nonlinear Systems of Partial Differential Equations in Applied Mathematics, Part 1 (Santa Fe, NM, 1984), 293-326. Lect. Appl. Math. 23, Amer. Math. Soc. , Providence, RI, (1986).
[14] Lax P. D., *"Hyperbolic systems of conservation laws II"*, Comm. Pure Appl. Math. 10, (1957), 537-566.

[15] Majda A., *"Compressible fluid flow and systems of conservation laws "*, Appl. Math. Sc. 53, Springer Verlag, New-York (1984).
[16] Merle F., *"Construction of solutions with exactly k blowup points for the Schrödinger equation with critical nonlinearity"*, Comm. Math. Physics 129, (1990), 223-240.
[17] Merle F. et Raphaël P., *"On a sharp lower bound on the blowup rate for the L^2 critical nonlinear Schrödinger equation"*, J. Amer. Math. Soc. 19, (2006), 37-90.
[18] Merle F. et Zaag H., *"Determination of the blowup rate for the semilinear wave equation"*, Amer. J. Math. 125, (2003), 1147-1164.
[19] Merle F. et Zaag H., *"Determination of the blowup rate for a critical semilinear wave equation"*, Math. Ann. 331, (2005), 395-416.
[20] Merle F. et Zaag H., *"On growth rate near the blowup surface for semilinear wave equations"*, Intern. Math. Res. Notices 19, (2005), 1127-1155.
[21] Perelman G., *"On the blowup phenomenon for the critical nonlinear Schrödinger equation in 1D"*, Ann. Inst. H. Poincaré 2, (2001), 605-673.
[22] Raphaël P., *"Stability of the log-log bound for blowup solutions to the critical nonlinear Schrödinger equation"*, Math. Annalen 331, (2005), 577-609.

S. Alinhac, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France
serge.alinhac@math.u-psud.fr