SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2003-2004

Serge Alinhac

Inégalités d'énergie et solutions d'équations d'ondes en métrique courbe

Séminaire É. D. P. (2003-2004), Exposé n° IV, 10 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2003-2004____A4_0>

INEGALITES D'ENERGIE ET SOLUTIONS D'EQUATIONS D'ONDES EN METRIQUE COURBE

par S. Alinhac

Introduction

Dans cet exposé, nous considérons sur $\mathbf{R}^4_{x,t}$ une métrique scindée

$$g = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j,$$

et le d'Alembertien associé L_g. Nous supposerons toujours g proche de la métrique plate g_0. Les deux questions que nous abordons sont les suivantes :

1) Pour quelles g peut-on établir des inégalités d'énergie "standard" pour L_g, dans lesquelles le facteur d'amplification soit bien contrôlé?
2) Pour quelles g les solutions de $L_g\phi = 0$ se comportent-elles approximativement comme des solutions de $L_{g_0}\phi = 0$?

Une réponse à la question 2) s'obtient par une méthode d'énergie utilisant des champs de Klainerman *modifiés* et une bonne inégalité répondant à la question 1).

I. Inégalités d'énergie géométriques

1. Quelques rappels de notations

a. Nous notons

$$t = x^0, x = (x^1, x^2, x^3).$$

Les indices grecs α, β, etc. sont sommés de 0 à 3 tandis que les indices latins i, j, etc. le sont de 1 à 3. La matrice inverse de $g_{\alpha\beta}$ est notée $g^{\alpha\beta}$, et l'on définit

$$\partial_\alpha = \partial_{x^\alpha}, \partial^\alpha = g^{\alpha\beta}\partial_\beta, \nabla\phi = \partial^\alpha\phi\partial_\alpha.$$

La métrique sera aussi notée $g(X,Y) =< X, Y >$ et la connexion associée D ; le Hessien d'une fonction ϕ est défini par

$$\nabla^2\phi(X,Y) = XY\phi - (D_X Y)\phi.$$

Le d'Alembertien L_g est alors

$$L_g\phi = g^{\alpha\beta}\nabla^2\phi_{\alpha\beta}.$$

Nous aurons aussi besoin de la seconde forme k associée aux surfaces $\{t = C\}$, définie par

$$k(X, Y) =< D_X \partial_t, Y >, k_{ij} = (1/2)\partial_t g_{ij},$$

dont la trace sera notée $\bar{k}$.

b. Il nous faut ici dire quelques mots du tenseur de déformation ${}^X\pi = \pi$ d'un champ X. Ce tenseur est défini par

$$\pi(Y, Z) =< D_Y X, Z > + < D_Z X, Y >, \pi_{\alpha\beta} = D_\alpha X_\beta + D_\beta X_\alpha. \tag{1.1}$$

C'est en fait la dérivée de Lie de g, ce qui explique qu'il intervient aussi bien dans les formules de commutation que dans les inégalités d'énergie pour L_g. Pour ces dernières, rappelons le calcul fondamental. On introduit, associé à une fonction ϕ, le tenseur

$$Q_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha \phi)(\partial_\beta \phi) - (1/2)g_{\alpha\beta}(g^{\mu\nu}\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi).$$

En posant, pour un champ X donné (le "multiplicateur"), $P_\alpha = Q_{\alpha\beta}X^\beta$, on trouve

$$D^\alpha P_\alpha = (1/2)Q^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta} + (L_g\phi)(X\phi).$$

Il est donc naturel, pour obtenir une inégalité à petite amplification, de choisir un multiplicateur X (de type temps de façon à obtenir une énergie positive) pour lequel les composantes de π soient les plus petites possibles.

2. Une inégalité sans amplification

Nous nous plaçons ici dans une première situation géométrique où l'on suppose donnée une *fonction optique* u, c'est à dire une fonction satisfaisant

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha u \partial_\beta u = 0, a = (\partial_t u)^{-1} > 0.$$

A cette fonction sont associés un feuilletage en "2-sphères"

$$S_{t_0,u_0} = \Sigma_{t_0} \cap \{u = u_0\}, \Sigma_{t_0} = \{t = t_0\},$$

un champ unitaire horizontal N orthogonal à ces sphères, et un couple de vecteurs isotropes

$$L = -\nabla u = a^{-1}(\partial_t + N), \underline{L} = a(\partial_t - N), < L, \underline{L} >= -2.$$

Si l'on choisit (e_1, e_2) un repère orthonormal sur les sphères, on travaillera dans le repère (e_1, e_2, e_3, e_4), où $e_3 = \underline{L}$, $e_4 = L$.

Définissons alors l'énergie "standard" (par opposition à "conforme", que nous ne discuterons pas ici, voir par exemple [6], [7])

$$E(t) = \int_{\Sigma_t} [a(L\phi)^2 + a^{-1}(\underline{L}\phi)^2 + (a + a^{-1})\Sigma_{i=1,2}(e_i\phi)^2]dv,$$

où dv est l'élément de volume associé à g.

Théorème 1. *Soit*

$$T_0 = (1/2)(L + \underline{L}), \pi =^{T_0} \pi.$$

Supposons, pour un $\epsilon > 0$, *les estimations*

$$(2.1)_a \qquad < u >^{1+\epsilon} a[\Sigma_{i=1,2}(\pi_{Li})^2 + (\Sigma_{i=1,2}\pi_{ii})^2] \in L^1_t L^\infty_x,$$

$$(2.1)_b \qquad < u >^{1+\epsilon} (\Sigma_{1\leq i,j\leq 2}|\pi_{ij}| + |\underline{\omega}| + \Sigma_{i=1,2}|\pi_{\underline{L}i}|) \in L^\infty_{x,t}.$$

Il existe alors $C = C_\epsilon$ *telle que pour toute* ϕ *satisfaisant* $L_g\phi = f$, *on ait*

$$(2.2) \qquad E^{1/2}(t) + \{\int_{0\leq t'\leq t} < u >^{-1-\epsilon} [(L\phi)^2 + \Sigma_{i=1,2}(e_i\phi)^2]dt'dv\}^{1/2} \leq$$

$$\leq CE^{1/2}(0) + C\int_0^t |(a^{1/2} + a^{-1/2})f|_{L^2(dv)}(t')dt'.$$

Il est difficile d'expliciter les hypothèses (2.1) du théorème : disons que les diverses composantes de π peuvent se calculer à l'aide des composantes de $\nabla^2 u$ et de k ; les composantes de $\nabla^2 u$ s'estiment à leur tour grâce à la formule

$$D_L\nabla^2 u_{\alpha\beta} + \nabla^2 u^\mu_\alpha \nabla^2 u_{\mu\beta} = R_{\alpha L\beta L},$$

où R est le tenseur de courbure de g. Pour une étude détaillée, on pourra consulter [9], ou aussi [7]. Il est important de remarquer que ces hypothèses sont moins fortes que l'hypothèse d'intégrabilité $|\partial_\alpha g_{\beta\gamma}| \in L^1_t L^\infty_x$ qui permettrait d'obtenir trivialement le résultat. Outre l'absence d'amplification, on notera qu'on obtient une meilleure estimation sur les "bonnes" dérivées associées à la donnée de u, c'est à dire sur les champs e_i tangents aux "sphères" et sur le champ L.

La preuve du théorème 1 est très simple, et repose sur deux idées (voir [1]):

i) Le multiplicateur T_0 est choisi en sorte qu'il ressemble à ∂_t, et que $\pi_{LL} = 0$. Cela implique que les termes de reste $\pi^{\alpha\beta}Q_{\alpha\beta}$ dans l'inégalité d'énergie ne font pas intervenir la composante $Q_{\underline{L}\underline{L}} = (\underline{L}\phi)^2$, la seule qui ne contienne pas au moins une bonne dérivée de ϕ.

ii) L'introduction d'un "poids fantôme" $e^{b(u)}$, avec $b'(s) = B(1+s^2)^{-\frac{1}{2}(1+\epsilon)}$ donne le contrôle supplémentaire des termes de bonnes dérivées

$$-b'(u)[(L\phi)^2 + \Sigma_{i=1,2}(e_i\phi)^2].$$

La combinaison de i) et ii) permet de conclure.

Le problème avec cette inégalité est qu'elle suppose la construction d'une fonction optique u convenable. Nous allons maintenant presenter une deuxième situation géométrique, qui peut être comprise comme une approximation de la première.

3. La situation quasi-radiale

On peut voir la situation géométrique décrite en 2. de la façon suivante : on choisit un feuilletage en sphères $S_{t,u}$; à normalisation près, L et $\underline{L}$ sont les vecteurs isotropes "sortant" et "entrant" dans l'orthogonal de l'espace tangent aux sphères. On suppose enfin que le système des 3-plans (e_1, e_2, e_4) est intégrable, les feuilles étant les cônes sortant $\{u = u_0\}$. On voit donc que le repère (e_1, e_2, e_3, e_4) préexiste à la fonction optique u, qui peut ne pas exister.

Dans une situation "quasi-radiale" (où l'on note bien sûr $r = |x|, \omega_i = x^i/r$), nous décidons que le feuilletage en sphères *standard*

$$S_{t_0,r_0} = \Sigma_{t_0} \cap \{r = r_0\}$$

est suffisant pour nos besoins. Le champ N est alors simplement

$$N = \frac{\nabla r}{c}, c = |\nabla r|, c^2 = g^{ij}\omega_i\omega_j,$$

et l'on pose

$$L = \partial_t + N, \underline{L} = \partial_t - N.$$

Dans ce cas, il n'y a pas de fonction optique, mais en fait $t - r$ est un bon ersatz. Le théorème suivant est analogue au théorème 1, les bonnes directions étant maintenant L et les rotations standard $R_i/r = (1/r)(x \wedge \partial)_i$.

Théorème 2. *Supposons, pour un $\epsilon > 0$, les estimations*

$$(3.1)_a \qquad < t - r >^{1+\epsilon} [\Sigma_{i=1,2}k_{Ni}^2 + (\Sigma_{i=1,2}k_{ii})^2] \in L_t^1 L_x^\infty,$$

$$(3.1)_b \qquad < t - r >^{1+\epsilon} [|\partial_t c/c| + \Sigma_{i=1,2}|k_{Ni}| + \Sigma_{1\le i,j\le 2}|k_{ij}|] \in L_{x,t}^\infty.$$

Il existe alors $C = C_\epsilon$ telle que pour toute ϕ satisfaisant $L_g\phi = f$, on ait

$$(3.2) \qquad E(t) + \int_{0\le t'\le t} < t' - r >^{-1-\epsilon} [(L\phi)^2 + \Sigma_{i=1,2}(e_i\phi)^2]dt'dv \le$$

$$\le CE(0) + C\int_{0\le t'\le t} |f||\partial_t\phi|dt'dv + C\int_0^t A(t')E(t')dt'.$$

Ici, le facteur d'amplification est

$$A(t) = |\partial_t c/c|_{L^\infty_x} + | < t-r >^{-1} (c-1)|_{L^\infty_x}.$$

L'hypothèse quasi-radiale consiste précisément à supposer A suffisamment décroissant en t. On remarquera cette fois que les hypothèses (3.1) du théorème sont beaucoup plus faciles à vérifier, puisqu'elles s'expriment directement en termes de dérivées premières de la métrique. La preuve du théorème 2 est analogue à celle du théorème 1, à ceci près qu'on utilise ∂_t comme multiplicateur et une fonction de $t-r$ comme "poids fantôme". Cela crée deux sortes d'"erreurs" :

i) La composante π_{LL} n'est plus zéro (π étant le tenseur de déformation de ∂_t). En fait,

$$\pi_{LL} = -2k_{NN} = -\partial_t c/c.$$

Cette erreur est responsable du premier terme dans le facteur d'amplification A.

ii) La fonction $t-r$ n'est pas exactement une fonction optique, en fait

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha(t-r)\partial_\beta(t-r) = c^2 - 1.$$

Cette erreur fournit le deuxième terme de A.

Nous allons donner dans la partie II une application de ce théorème au comportement des solutions de $L_g\phi = 0$.

II. Solutions du d'Alembertien dans une situation quasi-radiale

1. Nous nous plaçons ici dans la situation décrite en I.3. Comme la métrique $g = g_0+\gamma$ est une perturbation de la métrique standard g_0, le comportement de γ sera évalué en utilisant les paramètres $\sigma =< t-r >$ et $1+t+r$, ainsi que l'action des champs $R_i = (x\wedge\partial)_i$ (rotations) et $S = t\partial_t + x^i\partial_i$. On distinguera traditionnellement les trois zones

$$r \leq (1/2)(1+t), (1/2)(1+t) \leq r \leq (3/2)(1+t), r \geq (3/2)(1+t),$$

que l'on nommera "l'intérieur", "le bord du cône" et "l'extérieur".

Outre la seconde forme $k_{ij} = (1/2)\partial_t g_{ij}$ déja introduite, nous aurons aussi besoin de la seconde forme θ des sphères standard par rapport à l'espace ambiant, dans Σ_t

$$\theta(e_i, e_j) =< D_{e_i}N, e_j >, \bar{\theta} = \theta_{11} + \theta_{22}.$$

Toute cette partie s'inspire beaucoup du traitement du modèle non-linéaire [2]

$$\partial_t^2\phi - c^2(\phi)\Delta\phi = 0.$$

Pour donner aux hypothèses la souplesse requise dans des applications telles que celle ci-dessus, on mesurera le caractère quasi-radial de la situation à l'aide d'une fonction croissante $m(t)$ ($m' > 0$), telle que m' et m''/m' soient des symboles d'ordre -1, et que e^m soit négligeable devant toute puissance de $(1+t)$, c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, m(t) \leq C_\epsilon + \epsilon \log(1+t).$$

On pourra penser que m' est un peu plus petit que $(1+t)^{-1}$: par exemple, $m'(t) = (1+t)^{-1-\eta}$, ou, plus subtilement, $m(t) = (\log(1+t))^\lambda, 0 < \lambda < 1$.

Les hypothèses sur la métrique se répartissent alors en deux groupes : une hypothèse générale de décroissance de γ, assez faible ; une hypothèse spécifique de décroissance forte de $\bar{k}$, $\bar{\theta}$ et $1-c$:

(Décroissance faible) Pour un certain $\mu > 1/2$ et tout k,

$$|\Gamma^k \gamma^{\alpha\beta}| \leq \gamma_0 \sigma^{1/2} (1+t+r)^{-\mu}, \tag{1.1$_a$}$$

$$|\Gamma^k \partial \gamma^{\alpha\beta}| \leq \gamma_0 \sigma^{-1/2} (1+t+r)^{-\mu}. \tag{1.1$_b$}$$

Ici, Γ^k signifie un produit de k champs pris parmi R_i, S ou $\sigma^\mu \partial_\alpha$. A l'intérieur ou à l'extérieur, il suffit de prendre Γ parmi R_i, S ou ∂_α.

(Décroissance spécifique) *Au bord du cône*, on suppose

$$|\Gamma^k \bar{k}| \leq \gamma_0 \sigma^{-1/2} (1+t)^{-1}, |\Gamma^k \bar{\theta}| \leq \gamma_0 (1+t)^{-1}, \tag{1.2}$$

$$|1-c| \leq \gamma_0 \sigma^{1/2} m', |\partial c| \leq \gamma_0 \sigma^{-1/2} m', \tag{1.3}$$

$$|\Gamma^{k+1} c| \leq \gamma_0 \sigma^{1/2} m' e^{Cm}, |\Gamma^k \partial c| \leq \gamma_0 \sigma^{-1/2} m' e^{Cm}. \tag{1.4}$$

Nous supposerons les données de Cauchy (ϕ_0, ϕ_1) de ϕ de classe C^∞, réelles et vérifiant

$$\forall \alpha, \forall \beta, |\alpha| \leq |\beta|, x^\alpha \partial_x^\beta \phi_i \in L^2, i = 0, 1.$$

Le théorème est alors le suivant (ce théorème est en fait valable dans des situations plus générales où la métrique n'est pas scindée, cf. [3]).

Theorème 3. *Sous les hypothèses ci-dessus, pour γ_0 assez petit, nous avons, dans la zone $r \geq (1/2)(1+t)$, l'estimation*

$$|\partial u| \leq C \sigma^{-1/2} (1+t+r)^{-1} e^{Cm}. \tag{1.5}$$

On notera que l'estimation de décroissance n'a lieu qu'en dehors de la zone intérieure. Il s'agit d'un choix, qui est expliqué dans la remarque v) ci-dessous.

Plusieurs remarques doivent être faites à propos des hypothèses :

i) On notera partout l'homogénéité particulière des hypothèses par rapport à σ : les inégalités sur les coefficients font intervenir $\sigma^{1/2}$, tandis que les inégalités sur leurs gradients font intervenir $\sigma^{-1/2}$. Ce choix parait optimal dans les calculs ; par ailleurs, il faut penser aux applications aux problèmes non-linéaires

$$g^{\alpha\beta}(\phi, \nabla\phi)\nabla^2\phi_{\alpha\beta} = N(\phi, \nabla\phi)$$

qui motivent cette étude. Les termes en ∂g y font intervenir $\partial\phi, \partial^2\phi$, qui présentent naturellement une décroissance en $\sigma^{-1/2}$ vers l'intérieur, en conséquence de l'inégalité de Klainerman

$$\sigma^{1/2}(1+t+r)|\partial\phi| \leq C\Sigma|Z\partial\phi|_{L^2}.$$

ii) L'hypothèse de décroissance faible ne permet même pas d'obtenir une inégalité d'énergie raisonnable, car on est très loin de l'intégrabilité en temps de $|\partial\gamma|_{L^\infty_x}$. En revanche, les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites ! La valeur limite $\mu = 1/2$ semble jouer un rôle crucial ; dans nos calculs, cette limitation se traduit tout simplement par le fait qu'un facteur $\sigma^{-1/2}(1+t+r)^{-\mu}$ est intégrable à l'intérieur ou à l'extérieur.

iii) Si l'on choisit m' intégrable, le facteur d'amplification $A(t)$ dans l'inégalité (3.2) est intégrable, et donc il disparait de l'inégalité d'énergie. Dans les applications aux problèmes non-linéaires, ce n'est pas le cas, il faut au contraire choisir dans [2] par exemple

$$m(t) = \epsilon \log(1+t),$$

où ϵ mesure la taille des données de Cauchy.

iv) La petite différence du facteur e^{Cm} entre les estimations (1.3) et (1.4) est importante aussi dans les applications : un facteur de la taille de m' donne une amplification en e^{Cm}, qui est acceptable, tandis qu'un facteur de la taille de $m'e^{Cm}$ donne une amplification en $\exp e^{Cm}$, qui est exclu. De fait, dans [2] par exemple, on a (1.3) mais on n'a pas la majoration (1.4) sans le facteur e^{Cm}.

v) Le choix de ne pas inclure les rotations hyperboliques $H_i = x^i\partial_t + t\partial_i$ parmi les champs Γ est délibéré. L'enjeu est de vérifier que la méthode de preuve du théorème 3 (qui étend les techniques de [2]) ne requiert pas l'usage des H_i. La principale différence réside dans l'inégalité

$$\sigma|\partial v| \leq C\Sigma|Zv|,$$

où la somme est étendue à *tous* les champs de Klainerman $R_i, S, H_i, \partial_\alpha$. Si l'on avait inclus les champs H_i parmi les Γ, l'homogénéité particulière soulignée en i) aurait été une conséquence de l'inégalité ci-dessus. Au lieu de cela, on demande seulement que l'action de ∂_α, *au bord du cône*, fasse gagner σ^μ. La contrepartie de ce choix est l'absence d'estimation convaincante à l'intérieur : nous nous contentons donc d'une estimation pour $r \geq (1/2)(1+t)$.

2. La formule de commutation et la preuve du théorème 3

La preuve s'appuie sur la formule

$$[L_g, X]\phi = \pi^{\alpha\beta}\nabla^2\phi_{\alpha\beta} + D_\alpha\pi^{\alpha\beta}\partial_\beta\phi - (1/2)\partial^\alpha(tr\pi)\partial_\alpha\phi. \tag{2.1}$$

Ici, $\pi =^X \pi$ est le tenseur de déformation de X. On se propose d'utiliser cette formule avec $X = \partial_\alpha$, $X = R_i$ ou $X = S$. Dans la formule (I.1.1), les dérivées des coefficients de g, qui doivent logiquement apparaitre dans le commutateur, sont cachées dans les coefficients de la connexion D. Il est plus transparent d'écrire (comme on le voit facilement)

$$\pi^{\alpha\beta} = \partial^\alpha(X^\beta) + \partial^\beta(X^\alpha) - X(g^{\alpha\beta}).$$

Il est alors naturel d'écrire les traces qui apparaissent dans (2.1) dans le repère $(e_1, e_2, \underline{L}, L)$. Parmi les termes qui en résultent, les plus mauvais sont $\pi_{LL}\underline{L}^2\phi$: comme on ne peut "absorber" ces termes par Gronwall, on cherche à les détruire.

Pour ce faire, on va modifier les champs R_i ou S en les remplaçant par

$$\tilde{R}_i = R_i + a\partial_t, \tilde{S} = S + a\partial_t,$$

pour une fonction a bien choisie (une pour chaque champ). Donnons brièvement une idée du choix de a. Avec $Z = R_i$ ou $Z = S$, on note $\pi =^Z \pi$, et $\bar{\pi} =^T \pi, T = \partial_t$. On a alors

$$^{Z+aT}\pi(X,Y) = \pi(X,Y) + < D_X(aT), Y > + < D_Y(aT), X >=$$

$$= \pi(X,Y) + a\bar{\pi}(X,Y) + (Xa) < T, Y > + (Ya) < T, X >,$$

et en particulier

$$^{Z+aT}\pi_{LL} = \pi_{LL} + a\bar{\pi}_{LL} - 2La.$$

Reste à remarquer que

$$(1/2)\pi_{LL} =< D_L Z, L >=< D_L Z - D_Z L, L >=< [L, Z], L >,$$

et un calcul de $[L, Z]$ donne finalement $\pi_{LL} = -2Zc/c$. On obtient aussi $\bar{\pi}_{LL} = -2\partial_t c/c$. La condition pour faire disparaitre les mauvais termes en $\underline{L}^2\phi$ est donc

$$\pi_{LL} + a\bar{\pi}_{LL} - 2La = 0,$$

soit l'équation de transport

$$La + a\partial_t c/c + Zc/c = 0.$$

Il reste évidemment à voir que ce choix suffit pour éliminer également les mauvais termes d'ordre un en $\underline{L}\phi$: on peut considérer cela comme un miracle !

Une des difficultés que l'on rencontre lorsqu'on utilise ces champs modifiés $Z + aT$ est la suivante : supposons que l'on doive absorber un terme $(1+t)^{-1-\eta}\partial Z$ du commutateur

$$L_g\tilde{Z}\phi = \ldots + (1+t)^{-1-\eta}\partial Z\phi.$$

Comme l'inégalité d'énergie pour L_g ne donne que le contrôle des $\partial\tilde{Z}$, il faut faire aprparaitre Z à droite

$$(1+t)^{-1-\eta}\partial Z\phi = (1+t)^{-1-\eta}\partial\tilde{Z}\phi - (1+t)^{-1-\eta}(\partial a)T\phi - (1+t)^{-1-\eta}a\partial T\phi.$$

Or voilà : les hypothèses sur g ne permettent d'obtenir que les médiocres estimations de a

$$|a| \leq C\sigma^{1/2}e^{Cm}, |\partial a| \leq C\sigma^{-1/2}e^{Cm}.$$

Pour absorber le dernier terme écrit, il faudrait savoir par exemple que

$$|\partial T\phi| \leq C\sigma^{-1}\Sigma|\partial Z\phi|,$$

ce qu'on obtiendrait si on disposait de tous les Z, ce qui n'est pas le cas. L'outil de remplacement est fournit par le travail de Klainerman et Sideris [10] qui prouvent, dans le cas plat, l'inégalité ponctuelle

$$\sigma[|\Delta\phi| + |\partial_t^2\phi| + |\partial_i\partial_t\phi|] \leq C[|\partial\phi| + |\partial R_i\phi| + |\partial S\phi| + (t+r)|L_{g_0}\phi|].$$

Pour finir la preuve, il faut donc établir une inégalité analogue avec L_g, ce qui n'est pas très difficile.

Nous avons ici passé sous silence divers aspects calculatoires de la preuve : on trouvera dans [4], ou dans les textes originaux [2], [3], les indications nécessaires.

Bibliographie

[1] Alinhac S., *"Remarks on Energy Inequalities for Wave and Maxwell Equations on a Curved Background"*, Preprint, Université Paris-Sud, (2003), à paraitre dans Math. Annalen.
[2] Alinhac S., *"An Example of Blowup at Infinity for a Quasilinear Wave Equation"*, Astérisque 284, (2003), 1-91.
[3] Alinhac S., *"Free Decay of Solutions to Wave Equations on a Curved Background"*, Preprint, Université Paris-Sud, (2003), à paraitre au Bull. Soc. Math. France.
[4] Alinhac S., *"Free Decay of Solutions to Wave Equations on a Curved Background"*, à paraitre, Actes du Colloque d'Hammamet, (2003).
[5] Christodoulou D. and Klainerman S., *"The global nonlinear stability of the Minkowski space"*, Princeton Math. series 41, (1993).
[6] Hörmander L., *"Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations"*, Math. et Appl. 26, Springer Verlag, (1997).
[7] Klainerman S., *"A Commuting Vectorfields Approach to Strichartz type Inequalities and Applications to Quasilinear Wave Equations"*, Int. Math. Res. Notices 5, (2001), 221-274.
[8] Klainerman S. and Nicolò F., *"The Evolution Problem in General Relativity"*, Progress in Mathematical Physics 25, Birkhäuser, (2002).
[9] Klainerman S. and Rodniansky I., *" Improved local well posedness for quasilinear wave equations in dimension three"*, to appear, Duke Math. J. , (2002).
[10] Klainerman S. and Sideris T., *"On Almost Global Existence for Nonrelativistic Wave Equations in 3D"*, Comm. Pure Appl. Math. XLIX, (1996), 307-321.

S. Alinhac, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France.
serge.alinhac@math.u-psud.fr