Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2002-2003

Dong Ye

Prescription de la forme volume

Séminaire É. D. P. (2002-2003), Exposé n° XV, 8 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2002-2003____A15_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Prescription de la forme volume

Dong Ye

1 Introduction

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ et soit $f \in L^1(\Omega)$ satisfaisant

$$f \geq c > 0 \quad \text{sur } \Omega \qquad \text{et} \qquad \int_\Omega f = |\, \Omega \,|, \tag{1}$$

où $|\, \Omega \,|$ désigne la mesure de Lebesque de Ω. Nous cherchons des applications $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \bar{\Omega}$ qui appliquent la mesure de Lebesque $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N$ dans la mesure $f(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N$ et qui préservent les points du bord. Plus précisément, cela revient à trouver u telle que

$$\forall \;\; E \subset \Omega \text{ mesurable }, \qquad |\, u(E) \,| = \int_E f(x) dx \qquad \text{et} \qquad u|_{\partial\Omega} = id. \tag{2}$$

Quand u est lipschitzienne par exemple, (2) est équivalente à

$$\begin{cases} \det \nabla u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \quad u(x) = x & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

En 1941, Oxtoby et Ulam [OU] ont montré qu'il existe un homéomorphisme u de $\bar{\Omega}$ dans lui-même qui réalise cette transformation de la forme volume, un résultat que nous noterons par $L^1 \hookrightarrow C^0$. Une question naturelle est de savoir si l'on peut trouver des transformations u plus régulières, quand f admet plus de régularité.

L'équation (3) a été étudiée par Moser en 1965 (voir [Mo]), motivé par l'études des formes volume sur les variétés riemanniennes. En fait, il a montré que pour une variété riemannienne compacte $\mathcal{M}$ (avec ou sans bord), si on se donne deux formes volume $d\omega_1$ et $d\omega_2$ vérifiant

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega_1 = \int_{\mathcal{M}} d\omega_2,$$

alors il existe un difféomorphisme C^∞ de $\mathcal{M}$ dans lui-même, tel que $u^{\#}(d\omega_1) = d\omega_2$ et que u préserve $\partial\mathcal{M}$ si $\partial\mathcal{M} \neq \emptyset$. Autrement dit, *si $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ vérifie (1), alors il existe une solution u de (3) qui est un C^∞ difféomorphisme de $\bar{\Omega}$, i.e. $C^\infty \hookrightarrow C^\infty$.*

Par la suite, peu de résultats ont été obtenus avant 1990, date à laquelle Dacorogna et Moser ont prouvé dans [DM] le résultat suivant: *Soient $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$ et $\partial\Omega \in C^{k+1,\alpha}$.*

On a alors $C^{k,\alpha} \hookrightarrow C^{k+1,\alpha}$, c'est-à-dire, si $f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ vérifie (1), alors il existe un difféomorphisme u tel que u, $u^{-1} \in C^{k+1,\alpha}(\bar{\Omega})$ et u vérifie (3). Ils montrent aussi le résultat $C^k \hookrightarrow C^k \oplus (S)$ pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, où (S) est la condition de support suivante :

$$(S) \qquad supp(f-1) \subset\subset \Omega \implies supp(u - id) \subset\subset \Omega.$$

Ce problème est aussi directement liée à la construction de transformations incompressibles (dans la géométrie symplectique, par exemple) et trouve de nombreuses applications en probabilité (changement de densité de probabilité), ou en physique, notamment en élasticité. Un modèle typique en élasticité nonlinéaire (voir [D]) est comme suit : nous cherchons à étudier

$$\inf_{u|_{\partial\Omega}=id} \int_\Omega F\left(x,\, \det\nabla u(x)\right) dx,$$

où $F : \bar{\Omega} \times]0,\infty[\to]0,\infty[$ est une fonction continue telle que $\lim_{t\to\infty} F(x,t) = \infty$ et $\lim_{t\to 0^+} F(x,t) = \infty$. Soit $f(x) : \Omega \to]0,\infty[$ une fonction mesurable vérifiant $F(x,f(x)) = \min_{t>0} F(x,t)$ pour tout $x \in \Omega$, alors le problème de minimisation se résout si nous arrivons à résoudre l'équation (3). En plus, les transformations u en physique résident en général dans un espace de tranformations W bien précis, donc nous voudrions savoir si l'équation (3) admet une solution dans W pour la fonction f.

Le travail consiste donc à chercher l'application u la plus régulière possible, compte tenu de la régularité de f que l'on se donne. Par exemple, la question suivante a été posée dans [DM]: *Etant donné un changement de volume continu f vérifiant (1), peut-on trouver un C^1 difféomorphisme u qui le réalise, i.e. a-t-on $C^0 \hookrightarrow C^1$, ou plus faiblement, peut-on avoir au moins $C^0 \hookrightarrow C^{0,1}$?*

La grande difficulté de ce problème est due d'une part à la forte non linéarité de l'opérateur déterminant en dimension supérieure, et d'autre part due à la forte non unicité des solutions, car l'existence d'une solution entraîne l'existence d'une infinité de solutions à cause du groupe de difféomorphismes qui préservent la forme volume et le bord. Plus précisément, soit

$$\mathcal{D} = \left\{ v \in C^\infty(\bar{\Omega}),\, \det\nabla v \equiv 1,\, v|_{\partial\Omega} = id \right\},$$

nous savons que $\mathcal{D}$ est un groupe de Lie de dimension infinie si $N \geq 2$. Alors si on se donne une solution u de (2) ou de (3) et v quelconque dans $\mathcal{D}$, $v \circ u$ est clairement solution du même problème. Donc, sous des contraintes de régularité, soit on n'a aucune solution, soit on a une infinité de solutions!

Enfin, une autre difficulté est de préserver le bord, ou plus fortement de satisfaire la condition de support (S). En effet, quand nous travaillons sur une variété, en utilisant un argument de partition de l'unité, le problème peut être localisé et se ramène à (3) dans un domaine borné régulier de l'espace euclidien. Néanmoins, pour être capable ultérieurement de recoller les différentes pièces sur la variété tout en préservant la régularité de la transformation globale obtenue, on aura besoin de (S). Cela est illustré par le travail de Dacorogna et Moser ($C^k \hookrightarrow C^k \oplus (S)$), en essayant d'obtenir (S), ils n'ont plus le gain de régularité sur u.

2 Méthode du flot de Moser

Une méthode importante pour travailler sur ce problème a été l'idée du flot, présentée dans [Mo]: pour f satisfaisant (1), au lieu de chercher une application u qui transforme la mesure de Lebesque dx en $f(x)dx$, nous allons chercher f_t un chemin dans l'ensemble des formes volume qui relient $f(x)dx$ à dx et une famille de transformations φ_t faisant passer de f_t à f. Plus précisément, φ_t vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Big(f_t(\varphi_t)\det(\nabla\varphi_t)\Big) \equiv 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \varphi_0 = id, \quad f_0 = f & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Big(\det(\nabla\varphi_t)\Big) + \dfrac{\partial}{\partial t}\Big(\ln f_t(\varphi_t)\Big)\det(\nabla\varphi_t) \equiv 0, & \text{dans} \quad \Omega \\ \varphi_0 = Id, \quad f_0 = f & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Comme l'a proposé par Moser dans [Mo], nous allons chercher φ_t solution d'un flot:

$$\frac{\partial\varphi_t}{\partial t} = A_t(\varphi_t) \quad \text{dans} \ \ \Omega \qquad \text{et} \qquad \varphi_0 = Id \quad \text{dans} \ \ \Omega. \tag{5}$$

Par un calcul classique, (5) implique

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\det(\nabla\varphi_t)\Big) - \operatorname{div}A_t(\varphi_t)\det(\nabla\varphi_t) = 0.$$

Pour que (4) soit vérifié, il suffit alors que A_t soit solution de

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + \operatorname{div}(A_t f_t) = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \qquad \text{et} \qquad A_t \equiv 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \tag{6}$$

La difficulté consiste donc à trouver un chemin f_t et un flot A_t liés par (6), adaptés aux questions que l'on se pose. Si A_t est tel que (6) soit satisfait, et tel que $f_0 = f$, $f_T = 1$, en utilisant (4), on se convainc que φ_T est solution du problème (3).

Dans [DM], les auteurs ont utilisé le chemin linéaire $f_t = t + (1-t)f$ sur [0,1]. Il suffit alors de résoudre $\operatorname{div}(v) = 1 - f$, et de poser $A_t = v/f_t$. L'avantage de ce flot est sa simplicité, mais un inconvénient subsiste, c'est que l'on a n'a pas de gain de régularité pour A_t, et donc pour la solution u obtenue. Pour démontrer le résultat $C^{k,\alpha} \hookrightarrow C^{k+1,\alpha}$, ils sont obligés d'utiliser un argument supplémentaire de point fixe pour travailler au voisinage de 1.

3 Un flot régularisé

Avec T. Rivière, nous avons essayé (voir [RY]) de prendre un flot différent qui nous permettra d'obtenir le gain de régularité *directement* par le flot. Notre idée est de construire un chemin plus compliqué mais régularisé. Nous avons remarqué le fait suivant : soit η une fonction de troncature radiale telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta dx = 1.$$

Soient

$$\psi(x) = \eta(x)x, \quad \eta_t(x) = \frac{1}{t^N}\eta\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{et} \quad \psi_t(x) = \frac{1}{t^N}\psi\left(\frac{x}{t}\right),$$

nous définissons $f_t = f * \eta_t$ et $B_t = f * \psi_t$. Nous avons d'une part $f_t \in C^\infty$ dès que $t > 0$, et d'autre part

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} + \mathrm{div} B_t = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Donc si nous ignorons la condition (1) pour f_t ou les conditions au bord pour A_t, nous avons déjà résolu l'équation (6) en prenant tout simplement $A_t = B_t/f_t$.

En fait, nous allons prolonger la fonction f sur $\mathbb{R}^N$ telle que $supp(f-1)$ soit compact, nous allons prendre $f_t = f * \eta_t$ et $B_t = f * \psi_t$, les ajuster en suite, tel que (1) soit satisfaite par f_t, $B_t = 0$ sur $\partial\Omega \times \mathbb{R}_+$ et $\partial_t f_t + \mathrm{div} B_t = 0$ sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$. D'ailleurs, si $supp(\eta) \cap B(0,r_0) = \emptyset$, on aura que $f_t \equiv 1$ sur Ω pour t suffisamment grand. Ainsi nous obtenons un chemin régularisé pour relier $f(x)dx$ et dx, et une famille de champs de vecteurs $A_t = B_t/f_t$ qui est aussi C^∞ dès que $t > 0$.

Grâce à des estimations précises du genre

$$\|f_t - 1\|_{l+1,\beta} + \|B_t\|_{l+1,\beta} \le C\left(\frac{1}{t^{1+\beta-\gamma}} + 1\right)\|f-1\|_{l,\gamma}, \quad \forall\, \gamma,\beta \in\ [0,1],$$

nous obtenons des solutions u ayant une meilleure régularité par le flot directement, qui fournit en prime des estimations pour la solution u.

Théorème 1 *Soit $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$, on a $C^{k,\alpha} \hookrightarrow C^{k+1,\alpha}$ et pour tout β tel que $0 < \beta < \min(k+\alpha,1)$,*

$$\|u - Id\|_{C^{k+1,\alpha}(\bar\Omega)} \le C\|f-1\|_{C^{k,\alpha}(\bar\Omega)}, \tag{7}$$

où C ne dépend que de $\|f-1\|_{0,\beta}$, $\inf_\Omega f$, β, α, k et Ω. On a également $C^{k,1} \hookrightarrow \cap_{\alpha<1} C^{k+1,\alpha}$.

Le résultat dans le cas où $f \in C^{k,1}$ pourrait sembler être déjà démontré par Dacorogna et Moser, car $C^{k,1} \subset C^{k,\alpha}$ pour tout $\alpha \in\ ]0,1[$. Mais il est en fait beaucoup plus fort que celui obtenu dans [DM], car leur méthode permettait de construire une solution $u_\alpha \in C^{k+1,\alpha}(\bar\Omega)$ pour tout $0 < \alpha < 1$, mais dépendant de α (à cause de la non unicité et de leur argument de point fixe qui dépend de α), et rien ne peut garantir que c'est toujours la même solution, alors que nous obtenons une solution indépendante de α.

D'autre part, l'estimation (7) illustre la stabilité de la méthode, et le flot direct ouvre une voie à des approches numériques. En utilisant une idée similaire, Avinyó, Solà-Morales et València ont établi récemment deux algorithmes intéressants dans [ASV].

Enfin, cette méthode du flot permet d'aller encore plus loin, et de montrer l'existence de solutions u pour f peu régulière, comme par exemple $f \in C^0$, même pour $f \in L^\infty$ ou $f \in BMO$. En revanche, l'application de cette méthode dans le cas où f est peu régulière présente un inconvénient : il est alors difficile de préserver le bord $\partial\Omega$ tout en espérant d'obtenir une meilleure régularité pour u. D'où l'idée de procéder avec une approche différente.

4 Méthode constructive

Nous remarquons que l'une des difficultés essentielles pour travailler sur le déterminant jacobien vient de la composition des fonctions : il est souvent difficile de déduire des informations sur $\det(\nabla(u \circ v))$ à partir des informations sur $\det\nabla u$ et $\det\nabla v$, sauf dans un cas très particulier, si par exemple $\det\nabla u$ et $\det\nabla v$ sont constantes par morceaux, sur des sous-domaines bien précis.

C'est pourquoi nous nous sommes appliqués à résoudre dans un premier temps le problème avec $f = \alpha\chi_{\Omega_1} + \beta\chi_{\Omega_2}$, où Ω_i sont deux sous-domaines disjoints. Comme la régularité optimale est lipschitzienne, nous pouvons donc nous ramener à un cube sans perte de généralité. Le résultat clé (voir [RY]) de cette méthode est :

Théorème 2 *Soient $D = [0,1]^N$, $A = [0,1]^{N-1} \times [0,1/2]$ et $B = [0,1]^{N-1} \times [1/2,1]$. Soient α, $\beta > 0$ telles que $\alpha + \beta = 1$, alors il existe un homéomorphisme bi-lipschitzien Φ de D vérifiant*

$$\begin{aligned} &(i) \quad \begin{cases} \det \nabla\Phi = 2\alpha\chi_A + 2\beta\chi_B \\ \Phi(x)|_{\partial D} = x, \end{cases} \\ &(ii) \quad \|\nabla(\Phi - Id)\|_{L^\infty(D)} \le C_\eta |1 - 2\alpha| \end{aligned} \tag{8}$$

où $0 < \eta \le \alpha \le (1 - \eta) < 1$ et C_η dépend seulement de η.

Maintenant, nous allons faire une décomposition dyatique du domaine $[0,1]^N$, et approcher la fonction f par une suite de fonctions f_n, constantes par morceaux, et nous pouvons construire une suite de solutions lipschitziennes u_n telles que $\det\nabla u_n = f_n$. Grâce à l'estimation (ii) de (8), en analysant la convergence de la suite u_n construite, nous obtenons

Théorème 3 *Soit Ω lipschitzien, on a $C^0 \hookrightarrow \cap_{\alpha<1} C^{0,\alpha}$, i.e. il existe u solution de (2) telle que u, $u^{-1} \in \cap_{\alpha<1} C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ pour toute fonction continue f vérifiant (1).*

Théorème 4 *Pour $f \in L^\infty$ (ou BMO) vérifiant (1), il existe u solution de (2) dans $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ avec $\beta > 0$ dépendant de l'infimum de f et de la norme $\|f\|_{L^\infty}$ (ou $\|f\|_{BMO}$).*

Grâce au Théorème 3, on se trouve donc très proche d'une réponse à la question $C^0 \hookrightarrow C^{0,1}$, mais nous rencontrons de sérieuses difficultés.

La réponse de la question de Dacorogna et Moser, établie par deux articles dans un même numéro de GAFA en 1998 est finalement négative. Burago et Kleiner [BK], McMullen [Mc] ont donné l'exemple d'une fonction continue $f \geq c > 0$ telle que l'on ne trouvera jamais de fonction u bi-lipschitzienne qui résout $\det \nabla u = f$, même sans aucune condition au bord !

Leur motivation est une question posée par Gromov en système dynamique : *Etant donné un réseau séparable X de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), peut-on trouver une transformation bi-lipschitzienne u de $\mathbb{R}^N$ dans lui-même, telle que $u(X) = \mathbb{Z}^N$?* Par réseau séparable, on entend un sous-ensemble dénombrable $X = \{x_i\} \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\exists\ r_1, r_2 > 0$ satisfaisant $\mathbb{R}^N = \cup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, r_1)$ et $|x_i - x_j| \geq r_2$ pour tout $i \neq j$. Ils montrent que cette question est équivalente à la correspondance $C^0 \hookrightarrow C^{0,1}$, et donnent ainsi une réponse négative au problème de Gromov. Ce contre exemple signifie que le résultat du Théorème 3 est en quelque sorte optimal.

5 Quelques remarques et questions ouvertes

Dans tous les résultats des Théorèmes 1 à 4, il est possible pour nous de garantir que la condition de support (S) soit vérifiée. Si $supp(f-1) \subset\subset \Omega$, dans le cas de méthode constructive, il suffit de travailler sur un sous domaine strict. Dans le cas du Théorème 1, nous pouvons prolonger f par 1 sur $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, et utiliser le flot pour transformer $f_t(x)dx$ à $f(x)dx$. Nous allons choisir un $t_0 > 0$ suffisamment petit tel que $supp(f_{t_0} - 1) \subset\subset \Omega$ et $supp(\varphi_{t_0} - id) \subset\subset \Omega$. Comme $f_{t_0} \in C^\infty$, par le résultat de Dacorogna et Moser, nous pouvons ensuite transformer dx en $f_{t_0}(x)dx$. Donc toutes nos conclusions de régularité s'étendent aisément sur les variétés riemanniennes compactes, avec ou sans bord.

Dans [Mc], McMullen donne aussi la réponse négative à une autre question classique. Il montre qu'*il existe $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ($N \geq 2$) telle que l'on ne trouvera pas de solution $v \in W^{1,\infty}$ qui résout $div(v) = g$.* L'équation de divergence est en fait l'équation linéarisée de l'équation du déterminant jacobien au voisinage de id. Pour d'autres développements sur cette équation, on peut voir le récent travail de Brezis et Bourgain [BB].

Dans la méthode du flot ou dans la méthode constructive, on peut remarquer l'importance du fait que $f \geq c > 0$, et il n'existe pour l'instant pas de résultat général quand f change de signe, ou tout simplement quand f s'annule sur une partie de Ω. Dans le premier cas, u sera obligé de sortir du domaine Ω, ce qui rend l'étude très difficile; dans le deuxième cas, on risque d'avoir une chute spectaculaire de la régularité générale de solution u, comme ce qui se passe pour l'équation de Monge-Ampère.

Pour que les résultats soient vraiment parlants dans des problèmes variationnels en élasticité, il faudrait travailler avec des formes volume $f(x)dx$ dans les espaces de Sobolev, $W^{1,p}$ ou L^p par exemple. La première question de bien comprendre la régularité de $\det\nabla u$ avec u dans un espace de Sobolev. L'exemple le plus connu est quand $u \in W^{1,N}(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dans ce cas, on a immédiatement que $f = \det\nabla u \in L^1(\Omega)$, donc une question est de savoir si on a $L^1 \hookrightarrow W^{1,N}$ en dimension N. Nous savons maintenant que c'est faux, car l'opérateur déterminant jacobien peut s'écrire sous la forme de divergence, et qui provoque un phénomène de compacité par compensation. Plus précisément, si $u \in W^{1,N}$, $\det(\nabla u) \in \mathcal{H}^1$, l'espace de Hardy, un sous espace strict de L^1. Ce phénomène a été révélé pour la première fois pas S. Müller [Mu], et il y a eu ensuite beaucoup de travaux sur l'intégrabilité du déterminant jacobien.

La question $L^1 \hookrightarrow \mathcal{H}^1$ reste néanmoins ouverte, tout comme le cas où $f \in L^p$, $p \in]1,\infty[$, dont aucun résultat n'existe pour l'instant, car il est très difficile de conserver la régularité si on effectue le produit ou la composition des fonctions dans un espace de Sobolev comme $W^{1,p}$. Ainsi si on voulait utiliser le flot de Moser, on devrait travailler avec un champ de vecteurs $X \in W^{1,p}$ pour l'équation de transport $u_t = X(t,u)$, ce qui semble être délicat.

Un résultat dans les espaces de Sobolev a été prouvé dans [Y]. En adaptant la méthode de Dacorogna et Moser, nous avons montré que *si* $m \in \mathbb{N}^*$, $p > \max(1,N/m)$ *et si* $f \in W^{m,p}(\Omega)$ *vérifiant (1), alors nous avons une solution* u *de (3) qui appartient à* $W^{m+1,p}(\Omega)$, *i.e.* $W^{m,p} \hookrightarrow W^{m+1,p}$. L'avantage quand $p > \max(1,N/m)$, est que $W^{m,p}(\Omega)$ s'injecte maintenant dans un espace de Hölder, et il existe des propriétés sympathiques pour le produit et la composition.

Enfin, puisqu'il existe une infinité de solutions, comment pouvons nous choisir une solution qui minimise une fonctionnelle parmi toutes les applications qui réalisent le même changement de volume ? Le cas le plus connu est le fameux problème de transport de Monge-Kantorovich, pour lequel beaucoup de résultats intéressants ont été obtenus (voir [A]), mais on ne sait pas, par exemple dans le cas de symétrie radiale, si la solution radiale (le gradient de la solution de l'équation de Monge-Ampère) réalise le minimum de l'énergie de Dirichlet.

En conclusion, pour le problème de prescription de volume, il existe encore beaucoup de questions intéressantes et difficiles, qui demanderont sûrement de nouveaux efforts et des idées nouvelles.

Références

[A] Ambrosio L., *Optimal transport maps in Monge-Kantorovich problem*, Proceedings of the ICM (Beijing 2002), **III**, 131–140, Higher Ed. Press, Beijing, (2002).

[ASV] Avinyó A., Solà-Morales J. et Valèncis M., *On maps with given jacobians involving the heat equation*, prépublication (2000).

[BB] Bourgain, J. et Brezis H., *On the equation div $Y = f$ and application to control of phases*, J. Amer. Math. Soc. **16(2)**, 393–426 (2003).

[BK] Burago D. et Kleiner B., *Separated nets in Euclidean space and Jacobians of bi-Lipschitz maps*, Geom. Funct. Anal. **8**, 273-282 (1998).

[D] Dacorogna B., *Direct methods in the calculus of variations*, Springer-Verlag, Berlin, (1989).

[DM] Dacorogna B. et Moser J., *On a partial differential equation involving the Jacobian determinant*, Ann. I.H.P. Analyse Nonlinéaire **7**, 1-26 (1990).

[Mc] McMullen C.T., *Lipschitz maps and nets in Euclidean space*, Geom. Funct. Anal. **8**, 304-314 (1998).

[Mo] Moser J., *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **120**, 286-294 (1965).

[Mu] Müller S., *Higher integrability of determinants and weak convergence in L^1*, J. Reine Angew Math. **412**, 20-34 (1990).

[OU] Oxtoby J. et Ulam S., *Mesure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity*, Ann. Math. **42**, 874-920 (1941).

[RY] Rivière T. et Ye D., *Resolutions of the jacobian determinant equation*, Nonlinear Diff. Equa. and Appl., **3**, 323-369 (1996).

[Y] Ye D., *Prescribing the Jacobian determinant in Sobolev spaces*, Ann. IHP Analyse Nonlinéaire, **3**, 275-296 (1994).

D. Ye (dong.ye@math.u-cergy.fr)
Département de Mathématiques, site Saint-Martin
Université de Cergy-Pontoise, BP 222
95302 Cergy-Pontoise Cedex, France