



SEMINAIRE

**Equations aux
Dérivées
Partielles**

2001-2002

Jean-François Bony

Résonances près d'une énergie critique

Séminaire É. D. P. (2001-2002), Exposé n° XI, 9 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2001-2002____A11_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

RÉSONANCES PRÈS D'UNE ÉNERGIE CRITIQUE

Jean-François Bony

Résumé

Dans cet exposé, on décrit un travail effectué sous la direction de J. Sjöstrand. On prouve des majorations et des minorations du nombre de résonances d'un opérateur de Schrödinger semi-classique $P = -h^2\Delta + V(x)$ dans des petits disques centrés en $E_0 > 0$, une valeur critique de $p(x, \xi) = \xi^2 + V(x)$.

1 Introduction et résultat.

On rappelle que si E_0 n'est pas une énergie critique, on sait qu'il y a au plus $\mathcal{O}(\delta h^{-n})$ résonances dans le disque $B(E_0, \delta)$ avec $Ch < \delta < 1/C$. Cela a été démontré par Petkov et Zworski dans [8] et dans [1]. Ce résultat généralise le fait qu'un opérateur elliptique autoadjoint agissant sur une variété compacte a au plus $\mathcal{O}(\delta h^{-n})$ valeurs propres dans $[E_0 - \delta, E_0 + \delta]$, si E_0 n'est pas critique. Pour majorer le nombre de résonances près d'une énergie critique, on utilisera des majorations du nombre de valeurs propres pour un opérateur sur une variété compacte près d'une énergie critique (voir [3] et [6]).

Sous certaines hypothèses il est possible de connaître très précisément les résonances proches d'un niveau d'énergie critique $E_0 > 0$. Si P est analytique et si, en dehors d'un point critique non dégénéré, le flot du champ hamiltonien de P n'a pas de trajectoire captée dans la surface d'énergie E_0 , Helffer et Sjöstrand [5], pour un puits dans une isle, et Sjöstrand [10], dans le cas général, ont trouvé toutes les résonances dans un disque de taille Ch autour de E_0 , avec $C > 0$ quelconque. Ce résultat a été étendu aux disques de taille h^α , avec $\alpha > 0$, par Kaïdi et Kerdelhué [7]. En particulier, ils ont montré que

$$\text{Card}(\text{Res } P \cap B(E_0, \delta)) \sim \delta^n h^{-n},$$

pour h assez petit et $Ch < \delta < h^\alpha$.

Il existe aussi des résultats spécifiques à la dimension 1. Par exemple, si $V(x)$ est un potentiel à deux bosses de hauteur E_0 , Fujiié et Ramond [4] ont, entre autres, montré que

$$\text{Card}(\text{Res } P \cap B(E_0, \delta)) \sim \delta \ln(1/\delta) h^{-1},$$

pour $Ch < \delta < 1/C$. Cet exemple montre que la connaissance des points critiques est insuffisante pour donner des asymptotiques du nombre de résonances.

On se place dans le cadre de l'analyse semi-classique et $h \in]0, h_0[$ désigne le petit paramètre. On utilise la notation $\langle z \rangle = \sqrt{1 + |z|^2}$. Soit $m(x, \xi; h)$ une fonction positive sur $\mathbb{R}^{2n} \times]0, h_0[$. On dit qu'une fonction $d(x, \xi; h) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ est un symbole de classe $S_{a,b}(m)$ si, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ tel que

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta d(x, \xi; h) \right| \leq C_{\alpha,\beta} m(x, \xi; h) \langle x \rangle^{-a|\alpha|} \langle \xi \rangle^{-b|\beta|}.$$

On peut alors définir la h -quantification de Weyl de d , notée $D = \text{Op}(d)$. $d(x, \xi; h)$ est appelé le symbole de Weyl de l'opérateur h -pseudo-différentiel D . Si $d(x, \xi; h)$ a un développement en puissances de h de la forme

$$d \sim \sum_{j \geq 0} d_j(x, \xi) h^j$$

avec $d_j(x, \xi) \in S_{a,b}(m)$, on dit que d est un symbole classique et on note $d \in S_{a,b}^{cl}(m)$. $d_0(x, \xi)$ est alors le symbole principal.

Soit $P \in \text{Op}(S_{0,0}^{cl}(\langle \xi \rangle^2))$ un opérateur h -pseudo-différentiel qui coïncide en dehors d'un compact avec un opérateur h -différentiel d'ordre deux,

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x; h) (hD_x)^\alpha,$$

où $a_\alpha(x; h)$ ne dépend pas de h pour $|\alpha| = 2$. On admet que P est formellement autoadjoint, c'est à dire que :

$$\forall u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (Pu) \bar{v} dx = \int_{\mathbb{R}^n} u \overline{(Pv)} dx,$$

ou que $p(x, \xi; h)$ est réel. On suppose que l'opérateur P est elliptique au sens qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x, \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$p_0(x, \xi) \geq |\xi|^2/C - C.$$

Pour définir les résonances, on suppose qu'il existe $\theta > 0$ et $r > 0$ tels que les coefficients $a_\alpha(z; h)$ ont un prolongement holomorphe dans l'ensemble $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n; |\text{Im } z| \leq \theta \langle \text{Re } z \rangle \text{ et } |\text{Re } z| \geq r\}$ et que l'opérateur P est une perturbation à longue portée de $-h^2 \Delta$. Cela signifie que

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(z; h) \xi^\alpha \longrightarrow \xi^2,$$

lorsque $|\xi| \leq 1$ et $|z| \rightarrow +\infty$, $z \in \Gamma$, uniformément par rapport à h .

On fait maintenant des hypothèses très proches de celles de [3]. Soit E_0 un réel strictement positif. On suppose que l'ensemble des points critiques de $p_0(x, \xi)$ dans la surface d'énergie $\{p_0(x, \xi) = E_0\}$ est une sous-variété connexe \mathcal{C} de $T^*\mathbb{R}^n$ et que le Hessien de p_0 est non

dégénéré sur le sous-espace normal à \mathcal{C} . On note (r, s) la signature du Hessien de p_0 sur le sous-espace normal à \mathcal{C} . En conséquence, E_0 est une valeur critique isolée de $p_0(x, \xi)$.

Remarque: Sous les hypothèses précédentes, la codimension de \mathcal{C} , qui vaut $r + s$, est nécessairement plus grande que 1. Mais si on suppose que P est un opérateur h -différentiel d'ordre 2, l'ellipticité implique $r + s \geq n + 1$ et $r \geq n$.

Les résonances sont définies grâce à la méthode des dilatations analytiques (voir [12]). On prend la convention que les résonances ont une partie imaginaire négative ou nulle. On note $\text{Res } P$ l'ensemble des résonances de P comptées avec leur multiplicité.

Théorème 1 *On se place sous les hypothèses précédentes. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour h assez petit, E dans un petit voisinage de E_0 et $Ch < \delta < 1/C$, on a*

$$\text{Card}(\text{Res } P \cap B(E, \delta)) = \mathcal{O}(1) \frac{\delta h^{-n}}{\sqrt{|E - E_0| + \delta}}. \quad (1.1)$$

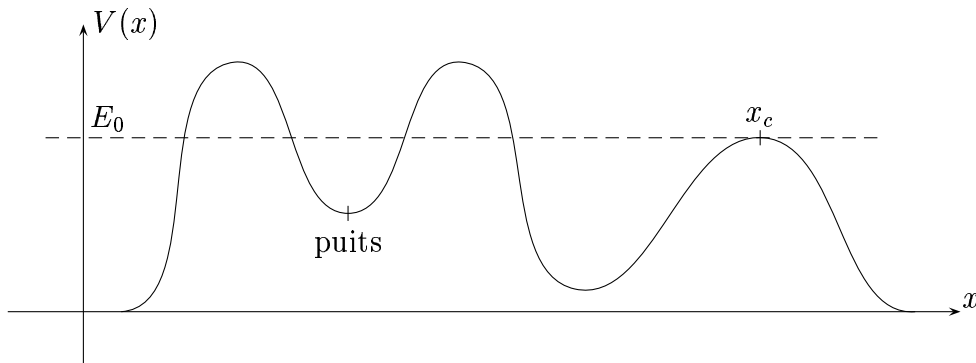
De plus, si pour tout $1 \leq j \leq N$, $r_j + s_j \geq 2$,

$$\text{Card}(\text{Res } P \cap B(E, \delta)) = \mathcal{O}(1) \delta |\ln(\delta + |E - E_0|)| h^{-n}. \quad (1.2)$$

De plus, si pour tout $1 \leq j \leq N$, $\max\{r_j, s_j\} \geq 2$,

$$\text{Card}(\text{Res } P \cap B(E, \delta)) = \mathcal{O}(1) \delta h^{-n}. \quad (1.3)$$

Remarque: Le résultat de Fujiié et Ramond [4] montre que (1.2) est optimal en dimension 1. D'autre part, en dimension quelconque, comme il n'est pas exclu que le champ hamiltonien de p_0 ait des trajectoires fermées dans la surface d'énergie E_0 , (1.3) est optimal. En effet, soient $E_0 > 0$ et $P = -h^2 \Delta + V(x)$ avec $V(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $V(x) = |x - C|^2 + C$ dans un puits et que, dans $\{V(x) = E_0\}$, le potentiel a un point critique, x_c , qui est non dégénéré. Typiquement, le potentiel est de la forme :



Le puits engendre de l'ordre de δh^{-n} quasimodes proches de E . Dans ces conditions, un résultat de Stefanov [14] affirme que $\text{Card}(\text{Res}(P) \cap \Omega_{\delta, E}) > \delta h^{-n}/C$, pour E au voisinage de E_0 et $Ch < \delta < 1/C$.

Théorème 2 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour h assez petit et $Ch < \delta < 1/C$, on a*

$$\text{Card}(\text{Res } P \cap B(E_0, \delta \ln(1/\delta))) \geq \delta^{\frac{n+s}{2}} h^{-n} / C. \quad (1.4)$$

Remarque: Les travaux de Sjöstrand [10] et de Kaïdi–Kerdelhué [7] montrent que, mis à part le facteur $\ln(1/\delta)$, la minoration précédente est optimale.

2 Preuve de la majoration.

Comme \mathcal{C} est compact, on peut trouver $R_0 \gg 1$ tel que $\mathcal{C} \subset B(0, R_0) \times \mathbb{R}^n$. Les points critiques de p_0 sont alors dans une “boîte noire”. D’après les résultats de [1] ou [8], pour majorer le nombre de résonances, il suffit de majorer le nombre de valeurs propres d’un opérateur de référence dans des domaines de tailles δ autour de E proche de E_0 . Soit donc $P^\#$ un opérateur de référence sur $T = (\mathbb{R}/R_1\mathbb{Z})^n$ avec $R_1 \gg R_0$ qui coïncide avec P près de $B(0, R_0)$ et dont le symbole n’a pas de point critique hors de $B(0, R_0) \times \mathbb{R}^n$ avec E_0 comme valeur critique (voir [12]). Pour majorer le nombre de valeurs propres de $P^\#$, on suit la démonstration de Brummelhuus, Paul et Uribe [3] mais comme on désire juste des majorations du nombre de valeurs propres et non un développement asymptotique, la situation est plus simple. On choisit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ vérifiant $f(t) = 1$ sur $[-1, 1]$ et on estime la norme trace de $f((P^\# - E)/\delta)$ à l’aide de techniques similaires à celles de [3].

On fixe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ une fonction positive, strictement positive au voisinage du support de f , et dont la transformée de Fourier est à support compact inclus dans $[-T, T]$. Soit $k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $f = g \times k$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \left\| f\left(\frac{P^\# - E}{\delta}\right) \right\|_{\text{tr}} \\ &= \mathcal{O}(1) \left\| g\left(\frac{P^\# - E}{\delta}\right) f((P^\# - E_0)/\varepsilon) \right\|_{\text{tr}} \\ &= \mathcal{O}(1) \text{tr} \left(\int \widehat{g}(t) e^{i(th/\delta)(P^\# - E)/h} f((P^\# - E_0)/\varepsilon) dt \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

où $\varepsilon \gg \delta$ est une petite constante fixe. On approche $e^{isP^\#/h} f((P^\# - E_0)/\varepsilon)$ par un O.I.F. D’après le chapitre IV de [9], il existe localement

$$\mathcal{U}_s \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \iint e^{i(\phi(s, x, \theta) - y \cdot \theta)/h} a(s, x, y, \theta; h) \varphi(y) d\theta dy, \quad (2.2)$$

défini pour $|s| \leq T$ vérifiant les assertions suivantes. La fonction $a(s, x, y, \theta; h)$ est un symbole de classe $S_{0,0}(1)$ à support compact dans les variables x, y, θ et la phase $\phi(s, x, \theta)$ satisfait l’équation eikonale

$$\begin{cases} \partial_s \phi - p_0^\#(x, \partial_x \phi) = 0 \\ \phi(0, x, \theta) = x \cdot \theta \end{cases} \quad (2.3)$$

où $p_0^\#$ est le symbole principal semi-classique de $P^\#$. Enfin,

$$\left\| \mathcal{U}_s - e^{isP^\#/h} f((P^\# - E_0)/\varepsilon) \right\|_{\text{tr}} = \mathcal{O}(h^\infty), \quad (2.4)$$

uniformément pour $|s| \leq T$. Si h/δ est assez petit, $|th/\delta| \leq T$ pour t dans le support de $\widehat{g}(t)$ et (2.1) devient

$$\mathcal{K} = \mathcal{O}(1)h^{-n} \iiint e^{i(\phi(th/\delta, x, \theta) - x\theta)/h} e^{-itE/\delta} \widehat{g}(t) a(th/\delta, x, x, \theta; h) dt dx d\theta + \mathcal{O}(h^\infty). \quad (2.5)$$

Soit $(x_0, \theta_0) \notin \mathcal{C}$ un point de la projection du support de $\widehat{g}a$ sur $\mathbb{R}_{x, \theta}^{2n}$. Comme (x_0, θ_0) est un point non-critique de $p_0^\#$, on peut trouver un changement de variables

$$(t, x, \theta) \longrightarrow (t, q = (\phi(th/\delta, x, \theta; \delta) - x\theta) \delta/th, u),$$

au voisinage de (x_0, θ_0) et dans ces nouvelles coordonnées (2.5) devient

$$\mathcal{K} = \mathcal{O}(1)h^{-n} \iiint e^{it(q-E)/\delta} b(t, q, u; \delta, h) dt dq du + \mathcal{O}(h^\infty), \quad (2.6)$$

où $b(t, q, u; \delta, h) \in S_{0,0}(1)$ est à support compact en t, q et u . Une phase stationnaire en t et $(q - E)$ montre que $\mathcal{K} = \mathcal{O}(1)\delta h^{-n}$.

Maintenant on suppose que $(x_0, \theta_0) \in \mathcal{C}$. [3] montre qu'il existe un changement de variables

$$(s, (x, \theta)) \longrightarrow (s, (u, v, w)),$$

où u, v et w varient dans des voisinages de 0 de $\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s$ et \mathbb{R}^{2n-r-s} respectivement. (x_0, θ_0) est envoyé sur $(0, 0, 0)$ et \mathcal{C}_j correspond à $u = v = 0$. Dans ces variables, la phase s'écrit

$$\phi(th/\delta, x, \theta) - x\theta = t(E_0 + u_1^2 + \cdots + u_r^2 - v_1^2 - \cdots - v_s^2)h/\delta.$$

Près de (x_0, θ_0) , (2.5) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \mathcal{O}(1)h^{-n} \iiint e^{it(E_0 - E + u_1^2 + \cdots + u_r^2 - v_1^2 - \cdots - v_s^2)/\delta} b(t, u, v, w; \delta, h) dt du dv dw + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= \mathcal{O}(1)h^{-n} \iiint \widehat{b}((E_0 - E + u_1^2 + \cdots + u_r^2 - v_1^2 - \cdots - v_s^2)/\delta, u, v, w; \delta, h) \\ &\quad du dv dw + \mathcal{O}(h^\infty), \end{aligned} \quad (2.7)$$

où $b(t, q, u; \delta, h) \in S_{0,0}(1)$ est à support compact et \widehat{b} est sa transformée de Fourier par rapport à t . En passant en coordonnées polaires dans les variables u et v , (2.7) s'écrit localement

$$\mathcal{K} = \mathcal{O}(1)h^{-n} \iiint U^{r-1} V^{s-1} \widehat{b}((E_0 - E + U^2 - V^2)/\delta, U, V, w; \delta, h) dU dV dw + \mathcal{O}(h^\infty).$$

En calculant cette quantité pour les différentes valeurs de r et s , on aboutit aux majorations (1.1), (1.2) et (1.3).

3 Preuve de la minoration.

3.1 Formule de trace locale

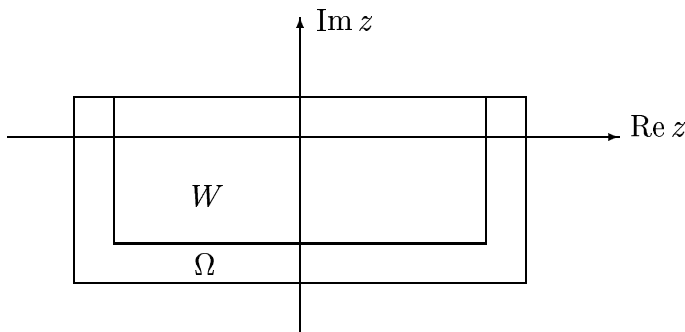
Dans cette partie on considère deux opérateurs P_j ($j = 0, 1$) qui vérifient les hypothèses de la première partie. Pour K_j ($j = 0, 1$) une quantité quelconque, on note

$$[K_j]_0^1 = K_1 - K_0.$$

Si les $a_\alpha^j(x; h)$ désignent les coefficients de P_j , on suppose qu'il existe $\tilde{n} > n$ tel que

$$[a_\alpha^j(z; h)]_0^1 = \mathcal{O}(1)\langle z \rangle^{-\tilde{n}},$$

pour tout $z \in \Gamma$. Soient $W \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ deux domaines de la forme :



On fixe $\chi \in C_0^\infty(\Omega \cap \mathbb{R})$, indépendant de h , tel que $\chi = 1$ au voisinage $W \cap \mathbb{R}$. On pose $\Omega_\delta = E_0 + \delta\Omega$, $W_\delta = E_0 + \delta W$ et $\chi_\delta(x) = \chi((x - E_0)/\delta)$. En suivant la démonstration de la formule de trace locale de Sjöstrand [11], on obtient la formule suivante qui est valable dans des domaines de taille δ .

Théorème 3 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour h assez petit et $Ch < \delta < 1/C$, la formule suivante est vraie. Soit $f(z; h)$ une fonction holomorphe dans Ω_δ vérifiant $|f(z; h)| \leq 1$ pour $z \in \Omega_\delta \setminus W_\delta$. On a alors*

$$\text{tr}[(\chi_\delta f)(P_j; h)]_0^1 = \left[\sum_{\lambda \in \text{Res} P_j \cap W_\delta} f(\lambda; h) \right]_0^1 + \mathcal{O}(1)\delta^{-1}h^{-n}. \quad (3.1)$$

Le reste $\mathcal{O}(1)\delta^{-1}h^{-n}$ est uniforme par rapport à $f(z; h)$ et E .

3.2 Estimation d'une trace

En suivant la construction de [12], on trouve un opérateur h -différentiel sur $L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\tilde{P} = \sum_{|\alpha| \leq 2} \tilde{a}_\alpha(x; h)(hD_x)^\alpha,$$

qui a les propriétés suivantes. P est proche de \tilde{P} à l'infini, car

$$a_\alpha(z; h) - \tilde{a}_\alpha(z; h) = \mathcal{O}(1)\langle z \rangle^{-n-1}, \quad (3.2)$$

pour tout $z \in \Gamma$. \tilde{P} n'a pas de résonance dans un voisinage de E_0 . D'autre part \tilde{p}_0 , le symbole principal semi-classique de \tilde{P} , n'a pas de point critique dans les surfaces d'énergie $\{\tilde{p}_0(x, \xi) = E\}$ où E est proche de E_0 . On pose $P_1 = P$ et $P_0 = \tilde{P}$.

On prend $0 < T \ll 1$, $1 \ll D$ et $g \in C_0^\infty([T/2, 2T])$ avec $g = 1$ près de T . On définit

$$f_g(E) = \int e^{-it(E-E_0)/\delta} g(t) e^{-(t-T)^2 D \ln(1/\delta)/2} dt. \quad (3.3)$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$ vérifiant $\varphi = 1$ au voisinage de E_0 .

Lemme 4 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour h assez petit et $Ch < \delta < 1/C$, on a*

$$|\operatorname{tr}[f_g(P_j)\varphi(P_j)]_0^1| \geq \delta^{\frac{r+s}{2}} h^{-n} \ln(1/\delta)^{-1/2}/C. \quad (3.4)$$

Preuve: On peut écrire

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr}[f_g(P_j)\varphi(P_j)]_0^1 \\ &= \operatorname{tr}\left(\int e^{-(t-T)^2 D \ln(1/\delta)/2} g(t) [e^{-it(P_j-E_0)/\delta} \varphi(P_j)]_0^1 (1 - \psi(x)) dt\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$- \operatorname{tr}\left(\int e^{-(t-T)^2 D \ln(1/\delta)/2} g(t) e^{-it(P_0-E_0)/\delta} \varphi(P_0) \psi(x) dt\right) \quad (3.6)$$

$$+ \operatorname{tr}\left(\int e^{-(t-T)^2 D \ln(1/\delta)/2} g(t) e^{-it(P_1-E_0)/\delta} \varphi(P_1) \psi(x) dt\right), \quad (3.7)$$

où $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est égal à 1 dans une grande boule.

On commence par majorer (3.6). On approche $e^{-isP_0/h} \varphi(P_0) \psi(x)$ par un O.I.F. noté \mathcal{U}_s qui vérifie des formules analogues à (2.2)–(2.4). Donc

$$(3.6) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \iiint e^{i(\phi_0(th/\delta, x, \theta) - x \cdot \theta + tE_0 h/\delta)/h} e^{-(t-T)^2 D \ln(1/\delta)/2} g(t) a(th/\delta, x, x, \theta; h) dt dx d\theta + \mathcal{O}(h^\infty). \quad (3.8)$$

Comme E_0 est une valeur non-critique de \tilde{p}_0 et comme 0 n'est pas dans le support de $g(t)$, une phase non-stationnaire implique que (3.6) est un $\mathcal{O}(\delta^\infty h^{-n})$ pour $Ch < \delta < 1/C$ avec C assez grand. (3.5) se traite de la même façon.

Pour étudier (3.7), on remplace $e^{-isP_1/h} \varphi(P_1) \psi(x)$ par un O.I.F. encore noté \mathcal{U}_s qui satisfait le même type de formules que précédemment et en plus $a(0, x, y, \theta; h) = 1$ dans un grand compact. Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[f_g(P_j)\varphi(P_j)]_0^1 &= \frac{1}{(2\pi h)^n} \iiint e^{i(\phi_1(th/\delta, x, \theta) - x \cdot \theta + tE_0 h/\delta)/h} e^{-(t-T)^2 D \ln(1/\delta)/2} \\ & g(t) a(th/\delta, x, x, \theta; h) dt dx d\theta + \mathcal{O}(\delta^\infty h^{-n}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

On découpe l'intégrale (3.9) avec une partition de l'unité en (x, θ) et on traite localement chaque terme.

On se place au voisinage de $(x_0, \theta_0) \notin \mathcal{C}$. La méthode suivie pour majorer (3.6) permet de montrer que, près de (x_0, θ_0) , (3.9) est un $\mathcal{O}(\delta^\infty h^{-n})$.

On étudie (3.9) près de $(x_0, \theta_0) \in \mathcal{C}$. Comme pour (2.7), on peut localement écrire

$$\mathrm{tr}[f_g(P_j)\varphi(P_j)]_0^1 = \frac{1}{(2\pi h)^n} \iiint e^{it(-u_1^2 - \dots - u_r^2 + v_1^2 + \dots + v_s^2)/\delta} e^{-(t-T)^2 C \ln(1/\delta)/2} g(t) b(t, u, v, w; \delta, h) dt du dv dw,$$

où $b(t, u, v, w; \delta, h)$ est une fonction à support compact, $b(0, u, v, w; \delta, h) > 1/C$ près de (x_0, θ_0) et $b(0, u, v, w; \delta, h) \geq 0$ sinon. En faisant une phase stationnaire dans les variables (u, v) et une intégration en (w, t) , on trouve localement

$$\mathrm{tr}[f_g(P_j)\varphi(P_j)]_0^1 = \delta^{\frac{r+s}{2}} h^{-n} \ln(1/\delta)^{-1/2} e^{i(s-r)\pi/4} (M(\delta, h) + \mathcal{O}(\delta)),$$

avec $1/C < M(\delta, h) < C$. Et finalement,

$$|\mathrm{tr}[f_g(P_j)\varphi(P_j)]_0^1| \geq \delta^{\frac{r+s}{2}} h^{-n} \ln(1/\delta)^{-1/2} / C. \quad (3.10)$$

3.3 Minoration du nombre de résonances

D'après le choix particulier de la fonction $f_g(E)$, on peut trouver des domaines fixes $W \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ tels que $f_g(E) = \mathcal{O}(\delta^\infty)$ pour $E \in \Omega_{\delta \ln(1/\delta)} \setminus W_{\delta \ln(1/\delta)}$. On applique alors la formule de trace locale dans les domaines de taille $\delta \ln(1/\delta)$ et on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}[f_g(P_j)\chi_{\delta \ln(1/\delta)}(P_j)]_0^1 &= \left[\sum_{\lambda \in \mathrm{Res} P_j \cap W_{\delta \ln(1/\delta)}} f_g(\lambda) \right]_0^1 + \mathcal{O}(1)\delta^\infty h^{-n} \\ &= \sum_{\lambda \in \mathrm{Res} P_1 \cap W_{\delta \ln(1/\delta)}} f_g(\lambda) + \mathcal{O}(1)\delta^\infty h^{-n}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

car P_0 n'a pas de résonance proche de E_0 . En utilisant le fait que $f_g(E)$ est très petit sur le support de $\chi_{\delta \ln(1/\delta)}(x) - \varphi(x)$, on déduit de (3.11) que

$$\mathrm{tr}[f_g(P_j)\varphi(P_j)]_0^1 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Res} P_1 \cap W_{\delta \ln(1/\delta)}} f_g(\lambda) + \mathcal{O}(1)\delta^\infty h^{-n}.$$

Le lemme 4 implique alors

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Res} P_1 \cap W_{\delta \ln(1/\delta)}} |f_g(\lambda)| \geq \delta^{\frac{r+s}{2}} h^{-n} \ln(1/\delta)^{-1/2} / C.$$

Et finalement, comme $f_g(E) = \mathcal{O}(1) \ln(1/\delta)^{-1/2}$ pour $E \in W_{\delta \ln(1/\delta)}$, il vient

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Res} P_1 \cap W_{\delta \ln(1/\delta)}) \geq \delta^{\frac{r+s}{2}} h^{-n} / C. \quad (3.12)$$

Références

- [1] J.F. Bony, *Résonances dans des domaines de taille h* , Inter. Math. Res. Not. 16 (2001), 817-847.
- [2] J.F. Bony, *Minoration du nombre de résonances engendrées par une trajectoire fermée*, Preprint, à paraître dans Comm. PDE.
- [3] R. Brummelhuis, T. Paul, A. Uribe, *Spectral Estimates around a critical level*, Duke Math. J. 78(3) (1995), 477-530.
- [4] S. Fujiié, T. Ramond, *Matrice de scattering et résonances associées à une orbite hétérocline*, Ann. Inst. Henri Poincaré 69(1) (1998), 31-82.
- [5] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Résonances en limite semi-classique*, Bull. de la SMF 114 (1986).
- [6] V. Ivrii, *Microlocal analysis and precise spectral asymptotics*, Springer Verlag (1998).
- [7] N. Kaïdi, P. Kerdelhué, *Forme normale de Birkhoff et résonances*, Asympt. Anal. 23(1) (2000), 1-23.
- [8] V. Petkov, M. Zworski, *Semi-classical estimates of the scattering determinant*, Ann. Inst. Henri Poincaré 2 (2001), 675-711.
- [9] D. Robert, *Autour de l'approximation semi-classique*, Birkhäuser (1987).
- [10] J. Sjöstrand, *Semiclassical resonances generated by a non-degenerate critical point*, Springer Verlag LNM 1256 (1986), 402-430.
- [11] J. Sjöstrand, *A trace formula and review of some estimates for resonances*, in *microlocal analysis and spectral theory*, Microlocal Analysis and Spectral Theory, NATO ASI series C, vol. 490 (1997), 377-437.
- [12] J. Sjöstrand, *Resonances for bottles and trace formulae*, Math. Nachr. 221 (2001), 95-149.
- [13] J. Sjöstrand, M. Zworski, *Complex scaling and the distribution of scattering poles*, J. of AMS 4(4) (1991), 729-769.
- [14] P. Stefanov, *Quasimodes and resonances : sharp lower bounds*, Duke Math. J. 99 (1999), 75-92.

Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université de Paris Sud
91405 Orsay cedex

Jean-Francois.Bony@math.u-psud.fr