



Centre de
Mathématiques
Laurent Schwartz



ÉCOLE
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1999-2000

Isabelle Gallagher

Décomposition en profils pour les solutions des équations de Navier-Stokes

Séminaire É. D. P. (1999-2000), Exposé n° XXIII, 13 p.

http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1999-2000____A23_0

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

1 Introduction

On s'intéresse aux équations de Navier–Stokes suivantes, décrivant l'évolution d'un fluide visqueux (de viscosité $\nu > 0$) et incompressible dans \mathbb{R}^3 , de vitesse $v(t, x)$ et de pression $p(t, x)$, où $t \in \mathbb{R}^+$ est la variable de temps, et $x \in \mathbb{R}^3$ la variable d'espace:

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v = -\nabla p & \text{dans } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^3 \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^3 \\ v|_{t=0} = v_0. \end{cases}$$

Rappelons que la pression peut être éliminée de ce système par projection sur les champs de vecteurs de divergence nulle, par l'intermédiaire du projecteur de Leray P , orthogonal dans L^2 . Avant d'entrer dans le cœur de notre étude, commençons par rappeler quelques résultats bien connus sur ce système; nous ne nous intéressons ici qu'aux solutions dites "fortes" de (NS) , c'est-à-dire aux cas où l'on a unicité des solutions (en particulier, nous n'étudions pas les solutions à la Leray [?]). Rappelons donc pour commencer le résultat de H. Fujita et T. Kato de [?]. On définit les espaces de Sobolev homogènes

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^3) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \mid \|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} < +\infty \right\} \quad \text{avec} \quad \|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

et le résultat de [?] est le suivant: si $v_0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ est un champ de vecteurs de divergence nulle, alors il existe un unique temps maximal $T_* > 0$ et une unique solution $v = NS(v_0)$ avec $v \in E_T \stackrel{\text{déf}}{=} C^0([0, T], \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))$ pour tout $T < T_*$. D'autre part, si le temps T_* vérifie $T_* < +\infty$, alors

$$\lim_{T \rightarrow T_*} \|v\|_{L^2([0, T], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))} = +\infty. \quad (1.1)$$

Enfin il existe une constante universelle c telle que

$$\|v_0\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq c\nu \quad \Rightarrow \quad T_* = +\infty \quad (1.2)$$

et dans ce cas on a pour tout $t \geq 0$,

$$\|NS(v_0)(t)\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2 + \nu \int_0^t \|NS(v_0)(s)\|_{\dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|v_0\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (1.3)$$

Il est important de remarquer que l'espace $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ est invariant par le changement d'échelle lié à l'équation: il est en effet facile de vérifier que pour tout réel λ ,

$$\begin{aligned} v = NS(v_0) &\Leftrightarrow v_\lambda = NS(v_{0,\lambda}) \\ \text{avec } v_\lambda(t, x) &\stackrel{\text{déf}}{=} \lambda v(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \text{et} \quad v_{0,\lambda}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda v_0(\lambda x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

En plus de $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, nous nous intéresserons à un autre espace invariant par ce changement d'échelle, qui est $L^3(\mathbb{R}^3)$: T. Kato a démontré dans [?] un théorème d'existence analogue au théorème de H. Fujita et T. Kato pour une donnée initiale dans $L^3(\mathbb{R}^3)$, et G. Furioli, P.-G. Lemarié et E. Terraneo ont obtenu dans [?] l'unicité de la solution associée

dans $C^0([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$. En particulier, nous utiliserons dans la suite le fait suivant, dont une démonstration peut se trouver en corollaire du théorème 3.4.2 de [?] (voir aussi [?] pour une preuve directe): il existe une constante universelle δ telle que si $v_0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ vérifie $\|v_0\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \leq \delta\nu$, alors

$$NS(v_0) \in E_\infty \quad \text{et} \quad \|NS(v_0)(t)\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2 + \nu \int_0^t \|NS(v_0)(s)\|_{\dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)}^2 ds \leq \|v_0\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (1.5)$$

Nous définissons, pour $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espace $\mathcal{D}_T \stackrel{\text{déf}}{=} \{v_0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3) \mid NS(v_0) \in E_T\}$. Remarquons que la boule de $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ centrée en 0 et de rayon $c\nu$, avec la notation (??), est évidemment incluse dans \mathcal{D}_∞ , mais on peut trouver des fonctions arbitrairement grandes dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ qui sont des éléments de \mathcal{D}_∞ : par exemple, des fonctions de $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ dont la norme $L^3(\mathbb{R}^3)$ est petite, d'après (??). Dans la suite, nous noterons

$$C_{NS} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup \{\rho > 0 \mid \bar{\mathcal{B}}_\rho \subset \mathcal{D}_\infty\}, \quad (1.6)$$

où $\mathcal{B}_\rho \stackrel{\text{déf}}{=} \{\varphi \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3) \mid \|\varphi\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} < \rho\}$, et $\mathcal{B}_{NS} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{B}_{C_{NS}}$. Enfin pour tout champ de vecteurs v nous noterons, pour $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$,

$$\|v\|_{E_T^\nu} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\|v\|_{L^\infty([0, T], \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))}^2 + 2\nu \|v\|_{L^2([0, T], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))}^2 \right)^{1/2}. \quad (1.7)$$

Venons-en à présent à l'objet de ce travail: il est bien connu que l'injection de $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ est continue, mais non compacte. Dans [?], P. Gérard a étudié très précisément le défaut de compacité de cette injection, en démontrant le résultat suivant.

Théorème 1 (P. Gérard, [?]) *Soit (φ_n) une suite de fonctions bornées dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$. Alors quitte à extraire une sous-suite, on peut la décomposer comme suit, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$:*

$$\forall \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \varphi_n(x) = \varphi^0(x) + \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{h_n^j} \varphi^j \left(\frac{x - x_n^j}{h_n^j} \right) + \psi_n^\ell(x), \quad (1.8)$$

où les fonctions φ^j sont dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ pour $j \in \mathbb{N}$, où (ψ_n^ℓ) est une suite bornée de $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, uniformément en $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, vérifiant

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n^\ell\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \right) = 0, \quad (1.9)$$

et où pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, (h_n^j, x_n^j) est une suite de $(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3)^\mathbb{N}$ vérifiant la propriété d'orthogonalité suivante: pour tous les entiers (j, k) tels que $j \neq k$, on a

$$\text{soit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{h_n^j}{h_n^k} + \frac{h_n^k}{h_n^j} \right) = +\infty \quad \text{soit} \quad h_n^j = h_n^k \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n^j - x_n^k|}{h_n^j} = +\infty. \quad (1.10)$$

Enfin l'on a pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\|\varphi_n\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2 = \sum_{j=0}^{\ell} \|\varphi^j\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\psi_n^\ell\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2 + o(1), \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

Remarque. Il est facile de constater que si φ_n est de divergence nulle pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors φ^j et ψ_n^ℓ le sont aussi, pour tous les entiers j, ℓ et n . D'autre part pour $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, quitte à remettre φ^j à l'échelle, on peut supposer que soit $h_n^j = 1$ (et $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n^j| = +\infty$), soit $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^j \in \{0, \infty\}$. Enfin l'on notera dans la suite

$$h_n^0 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 1, \quad x_n^0 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 0, \quad \text{et} \quad \varphi_n^0(x) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \varphi^0(x). \quad (1.12)$$

Notre but est de voir comment la d\u00e9composition (??) se propage par les \u00e9quations de Navier–Stokes. Par analogie avec le travail [?] sur l'\u00e9quation des ondes semi–lin\u00e9aire critique, nous serons amen\u00e9s \u00e0 consid\u00e9rer l'\u00e9quation lin\u00e9aire associ\u00e9e \u00e0 (NS):

$$(H) \quad \begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^3 \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

Notation. Nous noterons $H(u_0)$ la solution de (H) associ\u00e9e \u00e0 la donn\u00e9e u_0 .

Th\u00e9or\u00e8me 2 Soit (φ_n) une suite de champs de vecteurs de divergence nulle, born\u00e9e dans l'espace $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, et soit $\varphi^0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$, limite faible de (φ_n) . Alors quitte \u00e0 extraire une sous–suite, on a les r\u00e9sultats suivants, o\u00f9 l'on note $v_n \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} NS(\varphi_n)$ et $V^j \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} NS(\varphi^j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ avec les notations du th\u00e9or\u00e8me ?? et (??).

(i) Il existe une famille $(T^j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'\u00e9l\u00e9ments de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et un sous–ensemble fini $J \subset \mathbb{N}$ tels que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad V^j \in E_{T^j} \quad \text{et} \quad \forall j \in \mathbb{N} \setminus J, \quad T^j = +\infty. \quad (1.13)$$

D'autre part, si $\tau_n \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \min_{j \in J} (h_n^j)^2 T^j$, alors $\|v_n\|_{E_{\tau_n}^\nu}$ est born\u00e9e et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout temps $t \leq \tau_n$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a

$$v_n(t, x) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{h_n^j} V^j \left(\frac{t}{(h_n^j)^2}, \frac{x - x_n^j}{h_n^j} \right) + w_n^\ell(t, x) + r_n^\ell(t, x), \quad (1.14)$$

o\u00f9 pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $w_n^\ell \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} H(\psi_n^\ell)$ est born\u00e9e dans E_∞ uniform\u00e9ment en ℓ avec

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|w_n^\ell\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^3(\mathbb{R}^3))} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|r_n^\ell\|_{E_{\tau_n}^\nu} \right) = 0. \quad (1.15)$$

(ii) S'il existe un temps $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que (v_n) est born\u00e9e dans $L^2([0, T], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))$, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T \leq \min_{j \in J} (h_n^j)^2 T^j. \quad (1.16)$$

En particulier, les r\u00e9sultats ci–dessus sont vrais avec $\tau_n = T$ et les petites \u00e9chelles de concentration g\u00e9n\u00e8rent des solutions globales \u00e0 (NS): si $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^j = 0$, alors $T^j = +\infty$.

(iii) Dans le cas o\u00f9 il existe un r\u00e9el ρ tel que $\|\varphi_n\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \rho < C_{NS}$, alors $T^j = +\infty$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et les r\u00e9sultats ci–dessus sont vrais avec $\tau_n = +\infty$.

Corollaire 1 *Il existe une fonction croissante A de $[0, C_{NS}[$ dans \mathbb{R}^+ telle que pour tout champ de vecteurs de divergence nulle $\varphi \in \mathcal{B}_{NS}$, on a $\|NS(\varphi)\|_{E_\infty} \leq A\left(\|\varphi\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}\right)$. En outre, l'application NS envoyant les éléments de \mathcal{B}_{NS} sur la solution associée est Lipschitzienne.*

Remarque. L'idée de décomposer ainsi les solutions d'équations non linéaires trouve son origine dans le travail de H. Bahouri et P. Gérard dans [?], sur l'équation des ondes semi-linéaire critique. Ici l'on rencontre la difficulté supplémentaire du contrôle des temps d'existence des solutions de (NS) associées aux profils φ^j . Par contre on n'a pas de problème d'extraction de temps de concentration autres que le temps $t = 0$; cela est dû à l'effet diffusif de l'équation de la chaleur.

2 Démonstration du théorème

2.1 Résultat préliminaire

Proposition 1 *Soit $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, et soient φ^1 et φ^2 deux champs de vecteurs de divergence nulle, éléments de \mathcal{D}_T . Considérons deux suites orthogonales de $(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3)^{\mathbb{N}}$ au sens de (??), notées (h_n^1, x_n^1) et (h_n^2, x_n^2) . Supposons par exemple que $h_n^1 \leq h_n^2$. Alors avec la notation*

$$\varphi_n^j(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{h_n^j} \varphi^j\left(\frac{x - x_n^j}{h_n^j}\right), \quad (2.1)$$

on a les résultats d'orthogonalité suivants:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|NS(\varphi_n^1)NS(\varphi_n^2)\|_{L^4([0, (h_n^1)^2 T], L^2(\mathbb{R}^3))} = 0, \quad (2.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(NS(\varphi_n^1) \mid NS(\varphi_n^2) \right)_{L^\infty([0, (h_n^1)^2 T], \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3))} = 0, \quad (2.3)$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(NS(\varphi_n^1) \mid NS(\varphi_n^2) \right)_{L^2([0, (h_n^1)^2 T], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))} = 0. \quad (2.4)$$

Démonstration. L'invariance par changement d'échelle rappelée en (??) implique que la solution de (NS) associée à la donnée φ_n^j est définie par

$$\forall j \in \{1, 2\}, \quad v_n^j(t, x) \stackrel{\text{déf}}{=} NS(\varphi_n^j)(t, x) = \frac{1}{h_n^j} V^j\left(\frac{t}{(h_n^j)^2}, \frac{x - x_n^j}{h_n^j}\right),$$

où $V^j \stackrel{\text{déf}}{=} NS(\varphi^j)$. On a $V^j \in E_T$, donc $v_n^j \in E_{(h_n^j)^2 T}$. Calculons

$$\begin{aligned} & \|NS(\varphi_n^1)NS(\varphi_n^2)\|_{L^4([0, t], L^2(\mathbb{R}^3))}^4 \\ &= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^3} (h_n^1 h_n^2)^{-2} \left| V^1\left(\frac{t}{(h_n^1)^2}, \frac{x - x_n^1}{h_n^1}\right) \right|^2 \left| V^2\left(\frac{t}{(h_n^2)^2}, \frac{x - x_n^2}{h_n^2}\right) \right|^2 dx \right)^2 dt. \end{aligned}$$

On peut supposer que les fonctions V^j sont régulières et à support compact; procédons alors au changement de variables suivant:

$$x = x_n^1 + h_n^1 y, \quad t = (h_n^1)^2 s. \quad (2.5)$$

Il vient

$$\forall t \leq (h_n^1)^2 T, \quad \|v_n^1 v_n^2\|_{L^4([0,t], L^2(\mathbb{R}^3))} = O\left(\frac{h_n^1}{h_n^2}\right),$$

ce qui donne le résultat. Dans le cas où $h_n^1 = h_n^2$, ce changement de variables donne

$$\|v_n^1 v_n^2\|_{L^4([0, (h_n^1)^2 T], L^2(\mathbb{R}^3))}^4 = \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^3} |V^1(s, y)|^2 \left| V^2\left(s, y + \frac{x_n^1 - x_n^2}{h_n^2}\right) \right|^2 dy \right)^2 ds,$$

et comme V^2 est à support compact, le résultat (??) suit. Les arguments sont identiques pour les limites (??) et (??), et la proposition ?? est démontrée. \square

2.2 Démonstration du théorème, cas (iii)

Nous allons supposer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|\varphi_n\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \rho < C_{NS}$, avec la notation (??). Soit $\ell \in \mathbb{N}$. On sait que

$$\varphi_n = \sum_{j=0}^{\ell} \varphi_n^j + \psi_n^\ell,$$

avec la notation (??), donc (??) implique que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $\|\varphi_n^j\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \rho$, donc en particulier $\varphi_n^j \in \mathcal{D}_\infty$ pour tout j . Par conséquent, la fonction $V^j \stackrel{\text{déf}}{=} NS(\varphi_n^j)$ est dans E_∞ pour tout $j \in \mathbb{N}$. On définit alors

$$v_n^j(t, x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{h_n^j} V^j\left(\frac{t}{(h_n^j)^2}, \frac{x - x_n^j}{h_n^j}\right) = NS(\varphi_n^j),$$

et

$$r_n^\ell \stackrel{\text{déf}}{=} v_n - \sum_{j \leq \ell} v_n^j - w_n^\ell,$$

où $w_n^\ell \stackrel{\text{déf}}{=} H(\psi_n^\ell)$ et $v_n \stackrel{\text{déf}}{=} NS(\varphi_n)$. Un résultat classique sur l'équation de la chaleur (voir par exemple [?], Lemme 3.2.2) donne

$$\|H(\psi_n^\ell)(t, \cdot)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\psi_n^\ell\|_{L^3(\mathbb{R}^3)},$$

donc on a

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} w_n^\ell \right) = 0 \quad \text{dans } L^\infty(\mathbb{R}^+, L^3(\mathbb{R}^3)), \quad (2.6)$$

et pour obtenir le théorème ?? (iii), il suffit de démontrer que

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n^\ell \right) = 0 \quad \text{dans } E_\infty. \quad (2.7)$$

La fonction r_n^ℓ vérifie le système suivant:

$$\begin{cases} \partial_t r_n^\ell + P(r_n^\ell \cdot \nabla r_n^\ell) - \nu \Delta r_n^\ell + Q(r_n^\ell, f_n^\ell) &= g_n^\ell \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \\ r_n^\ell|_{t=0} &= 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

avec $f_n^\ell \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j \leq \ell} v_n^j + w_n^\ell$ et $g_n^\ell \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{2} \sum_{\substack{j \neq k \\ (j,k) \in \{0, \dots, \ell\}^2}} Q(v_n^j, v_n^k) - \sum_{j \leq \ell} Q(v_n^j, w_n^\ell) - P(w_n^\ell \cdot \nabla w_n^\ell)$, et

où l'on a noté $Q(a, b) \stackrel{\text{déf}}{=} P(a \cdot \nabla b + b \cdot \nabla a)$.

Proposition 2 *La suite (f_n^ℓ) est bornée dans E_∞ uniformément en ℓ , et*

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|g_n^\ell\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} = 0.$$

Avant de démontrer cette proposition, terminons la démonstration du théorème ?? (iii): un calcul classique sur les équations de type Navier–Stokes (voir par exemple [?]) implique que pour ℓ assez grand, uniformément en n , on a

$$\|r_n^\ell\|_{E_\infty^\nu} \leq C \|g_n^\ell\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} \left(1 + \exp\left(C \|f_n^\ell\|_{E_\infty^\nu}^2\right)\right).$$

Donc la proposition ?? implique (??), et le théorème ?? (iii) est démontré. \square

Démonstration de la proposition ??. Commençons par remarquer que la suite (v_n^j) est bornée dans E_∞ pour tout $j \in \mathbb{N}$ puisque

$$\|v_n^j\|_{E_\infty^\nu} = \|V^j\|_{E_\infty^\nu}.$$

Notons toutefois que l'on n'a pas à notre disposition d'estimation a priori pour $\|v_n^j\|_{E_\infty^\nu}$ (une telle estimation est par contre disponible pour des données petites par exemple, d'après (??)). Admettons provisoirement le résultat suivant.

Proposition 3 *Soit (φ_n) une suite bornée dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ de champs de vecteurs de divergence nulle, convergeant faiblement vers φ^0 . Alors il existe j_0 tel que si $V^j \stackrel{\text{déf}}{=} NS(\varphi^j)$, avec les notations du théorème ??, alors*

$$\forall j \geq j_0, \quad V^j \in E_\infty \quad \text{et} \quad \sum_{j \geq j_0} \|V^j\|_{E_\infty^\nu}^2 < +\infty.$$

Cette proposition démontre le résultat sur f_n^ℓ puisque d'après la proposition ??, on a

$$\left\| \sum_{j \leq \ell} v_n^j \right\|_{E_\infty^\nu}^2 = \sum_{j \leq \ell} \|V^j\|_{E_\infty^\nu}^2 + o(1), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

et la proposition ?? implique ainsi en particulier que

$$\sum_{j \leq \ell} v_n^j \quad \text{est bornée dans } E_\infty, \quad \text{uniformément en } \ell. \quad (2.9)$$

Démontrons à présent le résultat sur g_n^ℓ : il suffit de montrer que

$$\forall j \neq k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q(v_n^j, v_n^k) = 0 \quad \text{dans} \quad L^4(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)), \quad (2.10)$$

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} Q\left(\sum_{j \leq \ell} v_n^j, w_n^\ell\right) = 0 \quad \text{dans} \quad L^4(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)), \quad (2.11)$$

et

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} Q(w_n^\ell, w_n^\ell) \right) = 0 \quad \text{dans} \quad L^4(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)). \quad (2.12)$$

En effet, supposons un instant que (??)-(??) sont démontrés. Les fonctions v_n^j et w_n^ℓ sont bornées uniformément en j et en ℓ dans E_∞ , donc en particulier dans $L^{8/3}(\mathbb{R}^+, \dot{H}^{5/4}(\mathbb{R}^3))$ par exemple. Alors les lois de produit dans les espaces de Sobolev permettent d'en déduire que g_n^ℓ est bornée dans $L^{4/3}(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))$, et donc par interpolation avec (??)-(??), le résultat est démontré.

Démontrons donc (??). La condition de divergence nulle sur v_n^j implique que

$$P(v_n^j \cdot \nabla v_n^k) = P \operatorname{div}(v_n^j \otimes v_n^k),$$

donc il suffit de démontrer que

$$\forall j \neq k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n^j v_n^k\|_{L^4(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))} = 0, \quad (2.13)$$

ce qui est une conséquence de (??) démontrée dans la proposition ??. Donc (??) est obtenue, et démontrons maintenant (??) et (??): comme dans (??), il suffit de montrer que

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{j \leq \ell} v_n^j + w_n^\ell \right) w_n^\ell \right\|_{L^4(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))} = 0.$$

Par l'inégalité de Hölder on a

$$\left\| \left(\sum_{j \leq \ell} v_n^j + w_n^\ell \right) w_n^\ell \right\|_{L^4(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^3))} \leq \left\| \sum_{j \leq \ell} v_n^j + w_n^\ell \right\|_{L^4(\mathbb{R}^+, L^6(\mathbb{R}^3))} \|w_n^\ell\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^3(\mathbb{R}^3))}. \quad (2.14)$$

Mais

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\| \sum_{j \leq \ell} v_n^j + w_n^\ell \right\|_{L^4(\mathbb{R}^+, L^6(\mathbb{R}^3))} &\leq C \left\| \sum_{j \leq \ell} v_n^j \right\|_{L^4(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} + C \|w_n^\ell\|_{L^4(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} \\ &\leq C \left\| \sum_{j \leq \ell} v_n^j \right\|_{E_\infty^\nu} + C \|w_n^\ell\|_{E_\infty^\nu}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Alors par le résultat (??), on obtient que $\left\| \sum_{j \leq \ell} v_n^j + w_n^\ell \right\|$ est bornée dans $L^4(\mathbb{R}^+, L^6(\mathbb{R}^3))$, uniformément en ℓ , donc (??) et (??) impliquent (??) et (??). La proposition ?? est démontrée. \square

Démonstration de la proposition ??. La série de terme général $\|\varphi^j\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2$ étant convergente, on peut trouver j assez grand tel que la norme de φ^j dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ soit plus petite que $c\nu$, avec la notation (??). Alors par (??) on a pour j assez grand,

$$V^j \in E_\infty \quad \text{et} \quad \|V^j\|_{E_\infty^\nu}^2 \leq 2\|\varphi^j\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2.$$

D'où la proposition. \square

2.3 Démonstration du théorème, cas (i) et (ii)

Nous allons procéder par récurrence sur la borne de (φ_n) dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$: pour tout entier k , soit l'hypothèse de récurrence

$$(H_k) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } (\varphi_n) \text{ une suite de champs de divergence nulle, bornée dans } \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3) \\ \text{avec } \|\varphi_n\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\frac{k}{2}\right)^{1/2} C_{NS} . \\ \text{Alors les conclusions du théorème ?? (i)-(ii) sont vérifiées.} \end{array} \right.$$

Notons que le paragraphe précédent correspond en particulier à la démonstration de (H_1) ; dans ce cas, l'ensemble J est vide et $\tau_n = +\infty$.

Supposons à présent (H_k) vérifiée, et démontrons (H_{k+1}) : on considère une suite (φ_n) de champs de vecteurs de divergence nulle, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\varphi_n\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\frac{k+1}{2}\right)^{1/2} C_{NS} .$$

Dans la décomposition (??), si l'on a $\|\varphi^j\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} < C_{NS}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, alors les arguments de la section précédente donnent le résultat. Supposons donc qu'il existe un entier k_0 tel que

$$\|\varphi^{k_0}\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \geq C_{NS},$$

et soit $\ell_0 \geq k_0$ un entier vérifiant

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n^{\ell_0}\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \leq \delta \nu, \quad (2.16)$$

où δ est la constante définie dans l'introduction pour vérifier (??). On a alors

$$(\psi_n^{\ell_0}) \text{ est bornée dans } \mathcal{D}_\infty \text{ et } (NS(\psi_n^{\ell_0})) \text{ est bornée dans } E_\infty. \quad (2.17)$$

D'autre part, on déduit de (??) que pour n assez grand,

$$\begin{aligned} \|\psi_n^{\ell_0}\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq \|\varphi_n\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2 - \sum_{j=0}^{\ell_0} \|\varphi^j\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{C_{NS}^2}{2} \\ &\leq \frac{k+1}{2} C_{NS}^2 - C_{NS}^2 + \frac{C_{NS}^2}{2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\|\psi_n^{\ell_0}\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \frac{k}{2} C_{NS}^2, \quad (2.18)$$

et donc la suite $(\psi_n^{\ell_0})$ vérifie l'hypothèse de récurrence (H_k) . On a donc

$$\forall \ell \geq \ell_0 + 1, \quad NS(\psi_n^{\ell_0})(t, x) = \sum_{j=\ell_0+1}^{\ell} \frac{1}{h_n^j} V^j \left(\frac{t}{(h_n^j)^2}, \frac{x - x_n^j}{h_n^j} \right) + w_n^\ell(t, x) + \tilde{r}_n^\ell(t, x), \quad (2.19)$$

avec $V^j \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} NS(\varphi^j) \in E_\infty$, $w_n^\ell \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} H(\psi_n^\ell)$ v\u00e9rifie

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} w_n^\ell \right) = 0 \quad \text{dans} \quad L^\infty(\mathbb{R}^+, L^3(\mathbb{R}^3)),$$

et

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{r}_n^\ell \right) = 0 \quad \text{dans} \quad E_\infty. \quad (2.20)$$

Notons que l'on peut donc en particulier choisir $J \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{0, \dots, \ell_0\}$ et ainsi d\u00e9montrer (??).

On d\u00e9finit $(t_n) \in (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\})^\mathbb{N}$ telle que $\|NS(\varphi_n)\|_{E_{t_n}^\nu}$ est born\u00e9e. Alors on peut \u00e9crire, pour tout $t \leq \min(\tau_n, t_n)$,

$$NS(\varphi_n)(t, x) = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{h_n^j} V^j \left(\frac{t}{(h_n^j)^2}, \frac{x - x_n^j}{h_n^j} \right) + w_n^\ell(t, x) + \tilde{r}_n^\ell(t, x) + \bar{r}_n^{\ell_0}(t, x), \quad (2.21)$$

et il suffit de montrer que l'on peut prendre

$$t_n = \tau_n, \quad (2.22)$$

ainsi que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\bar{r}_n^{\ell_0}\|_{E_{\tau_n}^\nu} = 0. \quad (2.23)$$

Notons que le r\u00e9sultat (??) est une cons\u00e9quence de (??) par (??): en effet si (??) est v\u00e9rifi\u00e9e, alors tous les termes dans le membre de droite de (??) ont une norme $E_{\tau_n}^\nu$ born\u00e9e, ce qui implique la m\u00eame chose sur $NS(\varphi_n)$.

Pour simplifier les notations, r\u00e9-ordonnons les fonctions V^j , pour $j \leq \ell_0$, de mani\u00e8re \u00e0 ce que pour n assez grand, on ait

$$\forall j \leq k \leq \ell_0, \quad (h_n^j)^2 T_*^j \leq (h_n^k)^2 T_*^k, \quad (2.24)$$

o\u00f9 T_*^j est le temps d'existence de V^j . Si $T_*^j = +\infty$ pour tout j mais tous les φ^j ne sont pas dans \mathcal{D}_∞ , alors on choisit le premier indice 0 de telle mani\u00e8re \u00e0 ce que $\varphi^0 \notin \mathcal{D}_\infty$. Notons que $(h_n^j)^2 T_*^j$ est le temps d'existence de v_n^j d\u00e9finie par

$$v_n^j \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{1}{h_n^j} V^j \left(\frac{t}{(h_n^j)^2}, \frac{x - x_n^j}{h_n^j} \right).$$

On d\u00e9finit alors, pour tout champ f ,

$$S_0 f(s, y) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} h_n^0 f((h_n^0)^2 s, x_n^0 + h_n^0 y). \quad (2.25)$$

Notons que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $S_0 v_n^0 = V^0$. Alors pour tout entier ℓ , on d\u00e9finit

$$\begin{aligned} \forall j \leq \ell, \quad V_n^{j,0} &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} S_0 v_n^j, \quad \bar{R}_n^{\ell_0,0} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} S_0 \bar{r}_n^{\ell_0}, \\ W_n^{\ell,0} &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} S_0 w_n^\ell, \quad \tilde{R}_n^{\ell,0} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} S_0 \tilde{r}_n^\ell, \quad \text{et} \quad V_n^0 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} S_0 v_n. \end{aligned}$$

La fonction $\bar{R}_n^{\ell_0,0}$ vérifie le système suivant:

$$\begin{cases} \partial_s \bar{R}_n^{\ell_0,0} + P(\bar{R}_n^{\ell_0,0} \cdot \nabla \bar{R}_n^{\ell_0,0}) - \nu \Delta \bar{R}_n^{\ell_0,0} + Q(\bar{R}_n^{\ell_0,0}, F_n^{\ell,0}) = G_n^{\ell,0} \\ \bar{R}_n^{\ell_0,0}|_{s=0} = 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

avec $F_n^{\ell,0} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j \leq \ell} V_n^{j,0} + W_n^{\ell,0} + \tilde{R}_n^{\ell,0}$, et

$$\begin{aligned} G_n^{\ell,0} &\stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{1}{2} \sum_{\substack{j \neq k \\ (j,k) \in \{0, \dots, \ell\}^2}} Q(V_n^{j,0}, V_n^{k,0}) - \sum_{j \leq \ell} Q(V_n^{j,0}, W_n^{\ell,0} + \tilde{R}_n^{\ell,0}) \\ &\quad - \frac{1}{2} Q(W_n^{\ell,0}, 2\tilde{R}_n^{\ell,0} + W_n^{\ell,0}). \end{aligned}$$

Soit à présent $T^0 < T_*^0$ donné; alors $V_n^{j,0} = V^0$ est bornée dans E_{T^0} et plus généralement

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad (V_n^{j,0}) \text{ est bornée dans } E_{T^0}. \quad (2.27)$$

On a aussi le résultat suivant, qui se démontre de manière analogue à la proposition ??.

Proposition 4 *La suite (F_n^ℓ) est bornée dans E_{T^0} uniformément en ℓ , et*

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|G_n^{\ell,0}\|_{L^2([0, T^0], \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))} = 0.$$

Cette proposition implique, comme pour r_n^ℓ dans la section précédente, que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\bar{R}_n^{\ell_0,0}\|_{E_{T^0}} = 0, \quad (2.28)$$

d'où (??) après un changement d'échelle, et donc le résultat (i) est démontré. \square

Montrons enfin le résultat (ii). Soit $T \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que la suite (v_n) est bornée dans l'espace $L^2([0, T], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))$. Si $\varphi^j \in \mathcal{D}_\infty$ pour tout j , alors le résultat suit.

Sinon, alors avec la notation (??), on a $\varphi^0 \notin \mathcal{D}_\infty$. Choisissons $T^0 < T_*^0$ de la façon suivante. On a d'après la décomposition (??),

$$\sum_{j=0}^{\ell_0} v_n^j + \bar{r}_n^{\ell_0} \text{ est bornée dans } L^2([0, T], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)).$$

Alors par (??) on peut choisir $T^0 < T_*^0$ de telle manière que

$$\|V^0\|_{L^2([0, T^0], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))} \geq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=0}^{\ell_0} v_n^j + \bar{r}_n^{\ell_0} \right\|_{L^2([0, T], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))},$$

ce qui implique que

$$\sum_{j=0}^{\ell_0} \|V_n^{j,0}\|_{L^2([0, T^0], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))}^2 \geq 4 \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=0}^{\ell_0} v_n^j + \bar{r}_n^{\ell_0} \right\|_{L^2([0, T], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))}^2. \quad (2.29)$$

Mais par la proposition ?? on a

$$\left\| \sum_{j=0}^{\ell_0} V_n^{j,0} \right\|_{L^2([0,T^0], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))}^2 = \sum_{j=0}^{\ell_0} \|V_n^{j,0}\|_{L^2([0,T^0], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))}^2 + o(1),$$

quand n tend vers l'infini, donc (??) implique que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour n assez grand, on a, en notant $L_{T^0}^2(\dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} L^2([0, T^0], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\ell_0} \|V_n^{j,0}\|_{L_{T^0}^2(\dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))}^2 &\leq \varepsilon + 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\bar{R}_n^{\ell_0,0}\| + \sum_{j=0}^{\ell_0} \|V_n^{j,0}\|_{L_{T^0}^2(\dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))}^2 + 2 \|\bar{R}_n^{\ell_0,0}\|_{L_{T^0}^2(\dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))}^2 \\ &\leq \varepsilon + 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\bar{r}_n^{\ell_0}\| + \sum_{j=0}^{\ell_0} \|v_n^j\|_{L^2([0, (h_n^0)^2 T^0], \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))}^2. \end{aligned}$$

La seule façon de ne pas contredire (??) est d'avoir $T \leq (h_n^0)^2 T^0$, et donc le résultat (ii) est démontré. \square

3 Démonstration du corollaire

La démonstration du corollaire énoncé en introduction repose sur les méthodes de [?] et [?].

L'existence d'une estimation a priori dans le cas de données initiales dans \mathcal{B}_{NS} est une conséquence immédiate du résultat du théorème ?? (iii). Démontrons donc que le semi-groupe non linéaire d'évolution est Lipschitzien sur les boules de \mathcal{B}_{NS} .

Le fait qu'on dispose d'une estimation a priori sur \mathcal{B}_{NS} implique qu'il suffit de démontrer le résultat suivant.

Lemme 1 Soient u_0 et v_0 deux champs de vecteurs de divergence nulle, éléments de \mathcal{D}_∞ , et soit $u \stackrel{\text{d\'ef}}{=} NS(u_0)$. Alors

$$\frac{d}{d\varepsilon} (NS(u_0 + \varepsilon v_0))|_{\varepsilon=0} = v,$$

où v est la solution unique dans E_∞ du système suivant:

$$\begin{cases} \partial_t v + P(v \cdot \nabla u + u \cdot \nabla v) - \nu \Delta v = 0 \\ v|_{t=0} = v_0. \end{cases}$$

D'autre part, on a pour tout $t \geq 0$,

$$\|v\|_{E_t^\nu} \leq C \|v_0\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)} \left(1 + \left(\int_0^t \|u(s)\|_{\dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)}^2 ds \right)^{1/2} \right) \exp \left(C \int_0^t \|u(s)\|_{\dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)}^2 ds \right). \quad (3.1)$$

Démonstration du lemme ??. C'est un calcul facile que de montrer qu'il existe une solution unique au système linéarisé, vérifiant (??).

Soit à présent $u^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} NS(u_0 + \varepsilon v_0)$, et soit $\varepsilon r^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} u^\varepsilon - u - \varepsilon v$. Il suffit de montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r^\varepsilon = 0$ dans E_∞ . Mais la fonction r^ε vérifie

$$\begin{cases} \partial_t r^\varepsilon + Q(r^\varepsilon, u) - \nu \Delta r^\varepsilon &= f^\varepsilon \\ r^\varepsilon|_{t=0} &= 0, \end{cases}$$

avec $f^\varepsilon \stackrel{\text{déf}}{=} -\varepsilon P(v \cdot \nabla v + v \cdot \nabla r^\varepsilon + r^\varepsilon \cdot \nabla v + r^\varepsilon \cdot \nabla r^\varepsilon)$. Un calcul classique donne

$$\forall t \geq 0, \quad \|r^\varepsilon\|_{E_t^\nu} \leq C \|f^\varepsilon\|_{L_t^4(\dot{H}^{-1})} \left(1 + \|u\|_{L_t^2(\dot{H}^{3/2})} \exp C \|u\|_{L_t^2(\dot{H}^{3/2})}^2\right),$$

et comme

$$\|f^\varepsilon\|_{L_t^4(\dot{H}^{-1})} \leq C \varepsilon \left(\|v\|_{E_t^\nu}^2 + \|v\|_{E_t^\nu} \|r^\varepsilon\|_{E_t^\nu} + \|r^\varepsilon\|_{E_t^\nu}^2\right),$$

on a, en écrivant $X^\varepsilon(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \|r^\varepsilon\|_{E_t^\nu}$,

$$X^\varepsilon(t) \leq C \varepsilon \left(\|v\|_{E_t^\nu}^2 + \|v\|_{E_t^\nu} X^\varepsilon(t) + (X^\varepsilon(t))^2\right) \left(1 + \|u\|_{L_t^2(\dot{H}^{3/2})} \exp C \|u\|_{L_t^2(\dot{H}^{3/2})}^2\right).$$

Le résultat s'obtient alors par bootstrap. □

Références

- [1] H. Bahouri et P. Gérard: High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, *American Journal of Mathematics*, **121**, pages 131–175, 1999.
- [2] M. Cannone: Ondelettes, paraproduits et Navier–Stokes, *Diderot éditeur, Arts et Sciences*, 1995.
- [3] H. Fujita et T. Kato: On the Navier–Stokes Initial Value Problem I, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, pages 269–315, 1964.
- [4] G. Furioli, P.-G. Lemarié et E. Terraneo: Unicité des solutions mild des équations de Navier–Stokes dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces limites, à paraître, *Revista Matematica Iberoamericana and Preprint of Évyry university*, 1997.
- [5] I. Gallagher: Profile decomposition for solutions of the Navier-Stokes equations, *manuscrit*.
- [6] I. Gallagher et P. Gérard: Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle, *Prépublication, Université de Paris-Sud*, 2000.
- [7] P. Gérard: Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev, *ESAIM Contrôle Optimal et Calcul des Variations*, **3**, pages 213–233, 1998 (electronic version: <http://www.emath.fr/cocv/>).

- [8] T. Kato: Strong L^p solutions of the Navier–Stokes equations in \mathbb{R}^m with applications to weak solutions, *Math. Zeit.* **187**, pages 471–480, 1984.
- [9] J. Leray: Essai sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace, *Acta Mathematica*, **63**, pages 193–248, 1933.
- [10] F. Planchon: Global strong solutions in Sobolev or Lebesgue spaces to the incompressible Navier–Stokes equations in \mathbb{R}^3 , *Annales de l’Institut Henri Poincaré*, **13**, pages 319–336, 1996.

Université de Paris Sud
Département de Mathématiques
Bât. 425
91405 ORSAY Cedex France