Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1997-1998

Serge Alinhac

Explosion de solutions classiques d'équations d'ondes quasi-linéaires en deux dimensions d'espace

Séminaire É. D. P. (1997-1998), Exposé n° II, 11 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1997-1998____A2_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram
Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Explosion de solutions classiques d'équations d'ondes quasi-linéaires en deux dimensions d'espace

par S. Alinhac

Introduction

Nous considérons ici des équations quasi-linéaires dans R^{2+1}

$$L(u) \equiv \partial_t^2 u - \Delta_x u + \Sigma_{0\leq i,j,k\leq 2} g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = 0, \tag{0.1}$$

où

$$x_0 = t, x = (x_1, x_2), g_{ij}^k = g_{ji}^k.$$

Nous supposons les données de Cauchy C^∞, petites

$$u(x,0) = \epsilon u_1^0 + \epsilon^2 u_2^0 + \ldots, \partial_t u(x,0) = \epsilon u_1^1 + \epsilon^2 u_2^1 + \ldots, \tag{0.2}$$

et supportées dans une boule fixe de rayon M.

Nous pourrions tout aussi bien traiter des équations plus générales du type

$$\partial_t^2 u - \Delta u + \Sigma g_{ij}(\nabla u)\partial_{ij}^2 u = 0, \tag{0.1$'$}$$

avec $g_{ij}(0) = 0$, car les termes cubiques ou d'ordre plus élevé ne jouent guère de rôle dans l'explosion.

Comme dans [11], nous posons

$$g(\omega) = \Sigma g_{ij}^k \hat{\omega}_i \hat{\omega}_j \hat{\omega}_k, \tag{0.3}$$

où

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_1 = r\cos\omega, x_2 = r\sin\omega$$

sont les coordonnées polaires habituelles, et

$$\hat{\omega}_0 = -1, \hat{\omega}_1 = \cos\omega, \hat{\omega}_2 = \sin\omega.$$

Notre but est d'étudier l'existence de la solution classique du problème (0.1) (0.2), et plus précisément le temps de vie $\bar{T}_\epsilon$ de cette solution comme solution régulière et la nature de sa singularité au temps $\bar{T}_\epsilon$. Ce problème a été introduit et étudié (en dimension deux ou trois) par John (voir [12] et les références qui y sont citées), puis par Klainerman [13], [14], Hörmander [10], [11] et de nombreux auteurs. Grâce à une approximation assez grossière de la solution par des solutions de l'équation de Burger, Hörmander [10] a obtenu des bornes *inférieures* explicites du temps de vie. Le résultat en dimension deux est

$$\liminf \epsilon \bar{T}_\epsilon^{1/2} \geq (\max g(\omega)\partial_\sigma^2 R^{(1)}(\sigma,\omega))^{-1} \equiv \bar{\tau}_0. \tag{0.4}$$

Ici, le "premier profile" $R^{(1)}$ est défini par

$$R^{(1)}(\sigma,\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{s\geq\sigma} \frac{1}{\sqrt{s-\sigma}} [R(s,\omega,u_1^1] - \partial_s R(s,\omega,u_1^0)] ds, \tag{0.5}$$

où $R(s,\omega,v)$ désigne la transformée de Radon de la fonction v

$$R(s,\omega,v) = \int_{x_1 \cos\omega + x_2 \sin\omega = s} v(x)dx.$$

Il est suggéré dans [11] que ces bornes inférieures sont "les bonnes".

Nous prouvons ici, en dimension deux, que c'est effectivement le cas, sous la seule condition "générique" (en ce qui concerne les données de Cauchy)

(ND) La fonction $-g(\omega)\partial_\sigma^2 R^{(1)}(\sigma,\omega)$ a un unique minimum negatif non-dégénéré en un point (σ_0,ω_0).

En fait, la preuve du théorème 1 montre que le "temps de vie asymptotique" calculé en [2] est bien l'expansion asymptotique du vrai temps de vie $\bar{T}_\epsilon$. La méthode de démonstration fournit en outre une description précise de $\nabla^2 u$ près de l'unique point d'explosion M_ϵ au temps $\bar{T}_\epsilon$: il s'agit d'une explosion géométrique de type cusp, selon la terminologie de [3] (voir le théorème 2).

La méthode de la preuve comprend grosso modo trois volets :

i) Asymptotique : il faut étudier le comportement en grand temps de la solution, et introduire les "bonnes" variables normalisées,

ii) Algébrique : il faut écrire le système éclaté correspondant à (0.1) et montrer comment il se découple,

iii) d'Analyse : il faut prouver des estimations d'énergie sur le linéarisé du système éclaté, qui se réduit à peu près à un problème de Goursat pour une équation du troisième ordre.

Dans un précédent exposé [5], on a donné un aperçu des volets i) et iii).

Le plan du présent exposé est donc le suivant : on énonce d'abord (partie I, théorèmes 1 et 2) les résultats de l'étude pour les équations d'ondes. Dans une deuxième partie, on expose le volet algébrique et son interprétation géométrique ; c'est là la partie décisive et la plus nouvelle de l'exposé. Enfin, on esquisse très rapidement, dans la partie III, la façon dont la théorie de la partie II s'applique, en incorporant des éléments des volets i) et iii), pour prouver les résultats de I.

Tous les détails (éventuellement) manquants peuvent être trouvés dans les articles [6], [7].

I. Résultats pour les équations d'ondes

Nous considérons le problème (0.1) (0.2) déjà évoqué dans l'Introduction. Rappelons que les variables normalisées habituellement utilisées (cf. [11] par exemple) sont

$$\sigma = r - t, \omega, \tau = \epsilon t^{1/2}.$$

A l'aide de la fonction g (définie en (0.3)) et du premier profile $R^{(1)}$ (défini en (0.5)), nous pouvons formuler notre hypothèse :

(ND) La fonction $-g(\omega)\partial_\sigma^2 R^{(1)}(\sigma,\omega)$ a un unique minimum négatif non-dégénéré en un point (σ_0, ω_0).

Le premier théorème résoud la conjecture d'Hörmander sur l'asymptotique du temps de vie.

Théorème 1 (Temps de vie). *Le temps de vie $\bar{T}_\epsilon$ de la solution classique de (0.1) (0.2) vérifie*

$$\bar{\tau}_\epsilon \equiv \epsilon(\bar{T}_\epsilon)^{1/2} = \bar{\tau}_0 + O(\epsilon). \tag{1.1}$$

De plus, il existe un point $M_\epsilon = (x_\epsilon, \bar{T}_\epsilon)$ tel que, pour $t \geq \tau_0^2 \epsilon^{-2}$ $(0 < \tau_0 < \bar{\tau}_0)$ et ϵ petit,

i) La solution u est de classe C^1 et $|u|_{C^1} \leq C\epsilon^2$,

ii) La solution u est de classe C^2 en dehors de M_ϵ et vérifie $|u|_{C^2} \leq C\epsilon^2$ hors d'un voisinage de M_ϵ ; en outre

$$|\nabla^2 u(.,t)|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\bar{T}_\epsilon - t}, \tag{1.2}$$

$$|\partial_t^2 u(.,t)|_{L^\infty} \geq \frac{1}{C}\frac{1}{\bar{T}_\epsilon - t}. \tag{1.3}$$

Notons que l'asymptotique complète du temps de vie et de la position du point M_ϵ a déjà été calculée dans [2] ; la formule (1.1) n'est donnée avec un terme que pour simplifier.

Au voisinage du point M_ϵ, nous disposons d'une bien meilleure description de u.

Théorème 2 (Explosion géométrique). *Il existe un point* $\tilde{M}_\epsilon = (\tilde{m}_\epsilon, \bar{\tau}_\epsilon)$*, un voisinage* V *de* $\tilde{M}_\epsilon$ *dans* $\{(s,\omega,\tau), s \in R, \omega \in S^1, \tau \leq \bar{\tau}_\epsilon\}$ *et des fonctions* $\phi, v, w \in C^3(V)$ *avec les propriétés suivantes :*

i) La fonction ϕ *satisfait dans* V *la condition*

$$\textbf{(H)} \qquad \phi_s \geq 0, \phi_s(s,\omega,\tau) = 0 \Leftrightarrow (s,\omega,\tau) = \tilde{M}_\epsilon,$$

$$\phi_{s\tau}(\tilde{M}_\epsilon) < 0, \nabla_{s,\omega}(\phi_s)(\tilde{M}_\epsilon) = 0, \nabla^2_{s,\omega}(\phi_s)(\tilde{M}_\epsilon) >> 0.$$

ii) $w_s = \phi_s v$ *et* $v_s(\tilde{M}_\epsilon) \neq 0$*. Si l'on définit l'application*

$$\Phi(s,\omega,\tau) = (\sigma = \phi(s,\omega,\tau), \omega, \tau),$$

nous avons $\Phi(\tilde{M}_\epsilon) = (|x_\epsilon| - \bar{T}_\epsilon, x_\epsilon/|x_\epsilon|, \bar{\tau}_\epsilon) \equiv \bar{M}_\epsilon$*. La fonction* u *satisfait alors près de* M_ϵ

$$u(x,t) = \frac{\epsilon}{r^{1/2}} G(r-t, \omega, \epsilon t^{1/2}),$$

où G *est définie près de* $\bar{M}_\epsilon$ *par*

$$G(\Phi) = w.$$

Enfin, les fonctions ϕ, v, w *sont de classe* C^k *si* $\epsilon \leq \epsilon_k$*.*

Nous voyons donc que l'explosion de $\nabla^2 u$ est de nature "géométrique", et que l'application Φ a au point $\tilde{M}_\epsilon$ une singularité de type cusp. Compte tenu du fait que les termes non-linéaires de l'équation (0.1) n'ont aucune structure particulière (à part leur homogénéité), on peut penser que ce type d'explosion géométrique se produit souvent pour des équations ou systèmes quasi-linéaires. Nous espérons que des travaux ultérieurs viendront confirmer cette vue (cf. cependant [8] pour une esquisse de cas plus compliqués).

On peut déduire du théorème 2 le Corollaire suivant, qui est une sorte de "critère d'explosion" (au sens de [15] ou [8]) :

Corollaire. *Supposons que les données de Cauchy de* u *satisfassent (ND) et que* ϵ *soit assez petit. Alors, si* u *est* C^∞ *pour* $t < T \leq \bar{T}_\epsilon$ *et vérifie*

$$|\nabla^2 u(.,t)|_{L^2} \leq C,$$

cela implique $T < \bar{T}_\epsilon$*.*

Nous serions curieux de savoir s'il est possible de prouver une telle assertion par une méthode d'analyse fonctionnelle.

II. Eclatement d'une équation quasi-linéaire du second ordre

Cette partie est indépendante des autres. On y expose un procédé "algébrique" de construction de solutions singulières pour des équations du second ordre générales, sans aucune hypothèse d'hyperbolicité, etc. Un tel procédé a déjà été décrit en [3], [8] pour des systèmes quasi-linéaires généraux : définition d'un "système éclaté", etc. Ici, nous allons plus loin en ce sens que nous sommes capables d'élucider la structure du linéarisé du système éclaté, dans le cas vraiment non-linéaire.

Considérons, dans un domaine de R^n avec des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, l'équation

$$P(u) \equiv \Sigma p_{ij}(x, y, u, \nabla u)\partial_{ij}^2 u + q(x, y, u, \nabla u) = 0. \tag{2.1}$$

Nous avons posé ici $x_1 = x, y = (x_2, \ldots, x_n), \nabla u = (\partial_x u, \partial_y u)$. Nous utiliserons aussi les notations

$$\bar{\partial} = (0, \partial_2, \ldots, \partial_n), \hat{\phi} = (-1, \partial_2\phi, \ldots, \partial_n\phi).$$

Nous introduisons un changement de variables (inconnu)

$$\Phi(s, y) = (x = \phi(s, y), y) \tag{2.2}$$

et de nouvelles fonctions (inconnues)

$$w(s, y) = u(\phi(s, y), y), v(s, y) = (\partial_x u)(\phi(s, y), y). \tag{2.2$'$}$$

Notons que, nécessairement, $w_s = \phi_s v$. Nous posons donc $\mathcal{A} \equiv w_s - \phi_s v$, et nous appelons **"équation auxiliaire"** l'équation $\mathcal{A} = 0$.

Ce que l'on a en vue est la construction de solutions singulières de $P(u) = 0$; on s'intéresse donc aux points (s, y) où $\phi_s = 0$ et $v_s \neq 0$, car en de tels points

$$(\partial_x^2 u)(\Phi) = v_s\phi_s^{-1}.$$

1. La proposition suivante définit et décrit le **"système éclaté"** de P.

Proposition et Définition II.1. *Avec les notations ci-dessus, nous avons*

$$(\nabla u)(\Phi) = \bar{\partial}w - \hat{\phi}v,$$

$$(\partial_{ij}^2 u)(\Phi) = \bar{\partial}_{ij}^2 w - v\bar{\partial}_{ij}^2\phi - (\hat{\phi}_i\bar{\partial}_j v + \hat{\phi}_j\bar{\partial}_i v) + \hat{\phi}_i\hat{\phi}_j(\frac{v_s}{\phi_s}),$$

$$P(u)(\Phi) = \mathcal{E}\frac{v_s}{\phi_s} + \mathcal{R},$$

où

$$\mathcal{E} = \Sigma p_{ij}(\phi, y, w, \bar{\partial} w - \hat{\phi} v)\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j,$$

$$\mathcal{R} = \Sigma p_{ij}(\phi, y, w, \bar{\partial} w - \hat{\phi} v)[\bar{\partial}^2_{ij} w - v\bar{\partial}^2_{ij}\phi - (\hat{\phi}_i\bar{\partial}_j v + \hat{\phi}_j\bar{\partial}_i v)] + q(\phi, y, w, \bar{\partial} w - \hat{\phi} v).$$

Nous appelons le système

$$\mathcal{E} = 0, \mathcal{R} = 0, \mathcal{A} = 0 \tag{2.3}$$

le **"système éclaté"** *, la première équation de (2.3)* **"l'équation eikonale"***, la seconde* **"l'équation résiduelle"***. A toute solution régulière (ϕ, v, w) de (2.3) correspond par (2.2)' une ou plusieurs solutions singulières de (2.1) (selon la branche d'inverse de Φ que l'on a choisi), et de telles solutions sont appelées* **"solutions éclatées"***.*

Remarquons que seules les dérivées secondes d'une telle solution deviennent infinies là où ϕ_s s'annule ; cela est en accord avec ce que l'on attend d'une équation quasi-linéaire du second ordre.

2. Linéarisation du système éclaté

Lorsque l'on calcule le linéarisé du système (2.3), certains objets s'introduisent naturellement :

$$\gamma = \Sigma \partial_{\partial_k u} p_{ij}\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j\hat{\phi}_k, \tag{2.4}$$

$$Z_1 = \Sigma p_{ij}(\hat{\phi}_i\bar{\partial}_j + \hat{\phi}_j\bar{\partial}_i), Q = \Sigma p_{ij}\bar{\partial}^2_{ij}. \tag{2.5}$$

Notons

$$\mathcal{E}'_{\phi,v,w}(\dot{\phi}, \dot{v}, \dot{w}) \equiv \mathcal{E}'(\dot{\phi}, \dot{v}, \dot{w}) \equiv \mathcal{E}'$$

la différentielle de $\mathcal{E}$ au point (ϕ, v, w), et de même pour $\mathcal{R}$ et $\mathcal{A}$.

La proposition suivante décrit le linéarisé de (2.3).

Proposition II.2. *Posons $\dot{z} = \dot{w} - v\dot{\phi}$. Alors*

i) $\mathcal{E}'(\dot{\phi}, \dot{v}, \dot{w}) = -\gamma\dot{v} + Z_1\dot{\phi} + Z_2\dot{z} + a_0\dot{\phi} + b_0\dot{z},$

ii) $\mathcal{R}'(\dot{\phi}, \dot{v}, \dot{w}) = Q\dot{z} - Z_1\dot{v} + c_1\bar{\partial}\dot{z} + c_0\dot{z} + c_2\dot{\phi} + a_1\dot{v},$

iii) $\mathcal{A}'(\dot{\phi}, \dot{v}, \dot{w}) = \dot{z}_s + v_s\dot{\phi} - \phi_s\dot{v}.$

Dans cette proposition, il est inutile d'expliciter le champ Z_2 et les coefficients a_i, b_j, c_k.

3. Le cas vraiment non-linéaire

Considérons une solution régulière (ϕ, v, w) de (2.3) dans un domaine D.

Définition II.3. *Si la fonction γ définie en (2.4) ne s'annule pas dans D, nous disons que nous sommes dans le cas vraiment non-linéaire.*

Il s'agit, bien entendu, de la même situation que celle décrite par Lax pour les systèmes en dimension un d'espace. Le fait remarquable est que, dans cette situation, le système linéarisé décrit à la proposition II.2 se découple, au sens du théorème suivant.

Théorème 3. *Dans le cas vraiment non-linéaire ont lieu les identités suivantes :*

$$(Z_1\partial_s - \phi_s Q + Q_1)\dot{z} + \alpha_1 Z_1 \dot{\phi} + \alpha_2 \dot{\phi} = -\phi_s \mathcal{R}' + (Z_1 + \alpha_3)\mathcal{A}' + \alpha_4 \mathcal{E}', \tag{2.6}$$

$$(Z_1^2 + \beta_1 Z_1 + \beta_2)\dot{\phi} + \tilde{Q}\dot{z} = (Z_1 + \alpha_5)\mathcal{E}' - \gamma \mathcal{R}'. \tag{2.7}$$

Ici, les coefficients α_i et β_j sont réguliers, Z_2 et $\tilde{Q}$ sont des opérateurs en y d'ordres 1 et 2, tandis que Q_1 est d'ordre 1 en toutes les variables. De plus, les coefficients de couplage α_1 et α_2 sont des combinaisons linéaires des dérivées de $\mathcal{E}, \mathcal{R}$ et $\mathcal{A}$.

Le point de ce théorème est que les coefficients de couplage seront petits si $\mathcal{E}, \mathcal{R}, \mathcal{A}$ sont petits ; dans un schéma de résolution du système éclaté genre Nash-Moser, les termes $\alpha_1 Z_1 \dot{\phi}$ et $\alpha_2 \dot{\phi}$ seront donc quadratiquement petits, et donc negligeables. Le système à résoudre se découple alors en l'équation du second ordre

$$Z_1\partial_s - \phi_s Q + \dots$$

et l'équation différentielle ordinaire en Z_1 sur $\dot{\phi}$.

4. Quelques remarques géométriques

a. La “bonne inconnue”

Lorsque l'on établit le système éclaté (2.3), on ne perd pas de vue que Φ, v, w ne peuvent être déterminés séparément, parce que l'on peut toujours remplacer Φ par $\Phi\Phi_1$ (Φ_1 étant un difféomorphisme), et v et w par $v(\Phi_1), w(\Phi_1)$. Ce dont on a réellement besoin ici est que Φ' soit de corang 1 là où elle n'est pas inversible. La forme (2.2) convient alors dans tous les cas, et permet des calculs relativement simples. La structure du système (2.3) reflète, bien entendu, cette indétermination. De façon générale, si $u(\Phi) = w$, alors $\dot{u}(\Phi) + u'(\Phi)\dot{\Phi} = \dot{w}$, et la “bonne inconnue” pour le système éclaté linéarisé est : $\dot{w} - u'(\Phi)\dot{\Phi}$. Ici, $\dot{z}$ est cette bonne inconnue, car $v = (\partial_x u)(\Phi)$.

b. L'équation eikonale

Si nous posons formellement

$$\Phi^{-1}(x, y) = (\psi(x, y), y),$$

nous trouvons

$$(\nabla\psi)(\Phi) = -\frac{1}{\phi_s}\hat{\phi}.$$

Donc l'équation $\mathcal{E} = 0$ équivaut à

$$\Sigma p_{ij}(x, y, u, \nabla u)(\partial_i\psi)(\partial_j\psi) = 0,$$

c'est à dire que la lagrangienne (singulière) $\Lambda = \{(x, y, \nabla\psi)\}$ est caractéristique pour l'équation linéarisée de (2.1).

c. Le champ de transport Z_1

Ce champ joue un rôle fondamental dans le système linéarisé, comme on le voit au Théorème 3. Si $p = \Sigma p_{ij}(x, y, u, \nabla u)\xi_i\xi_j$ est le symbole principal du linéarisé sur une solution éclatée u de (2.1), on calcule facilement que

$$\Phi' Z_1 = -\phi_s \pi_* H_p,$$

où π désigne la projection canonique

$$\pi : (x, \xi) \mapsto x.$$

Les remarques 2 et 3 montrent que la construction de u que l'on fait est en réalité une sorte d'**"optique géométrique"** , dans laquelle Φ joue le rôle de la phase, Z_1 le rôle du transport et ϕ_s^{-1} le rôle du grand paramètre.

d. La fonction γ

Pour une solution éclatée telle que u, on voit facilement que la partie singulière de u'' est donnée par la matrice de rang un $\hat{\phi}^t\hat{\phi}$; la fonction γ décrit donc la variation du symbole p par rapport à ∇u dans la direction pertinente $-\hat{\phi}$.

III. Application aux équations d'ondes

L'idée de la preuve des théorèmes 1 et 2 est de construire, dans une bande

$$-C_0 \le r - t \le M, \tau_0^2\epsilon^{-2} \le t \le \bar{T}_\epsilon, 0 < \tau_0 < \bar{\tau}_0,$$

un morceau de solution qui explose au temps $\bar{T}_\epsilon$. Cette construction se fait en quatre étapes, que nous résumons brièvement.

Etape 1 : Analyse asymptotique, normalisation des variables et réduction à un problème local

Nous utilisons ici l'information sur le comportement de la solution u de (0.1) (0.2) pour $r - t \geq -C_0$ et $\epsilon t^{1/2}$ proche de τ_0. A cause de (0.4), nous sommes ici loin de toute explosion. Les résultats de [1] montrent que u se comporte dans un tel domaine comme une fonction régulière (dépendant aussi régulièrement de ϵ et $\epsilon^2 ln\epsilon$) des variables "normalisées"

$$\sigma = r - t, \omega, \tau = \epsilon t^{1/2}.$$

Si l'on pose

$$u(x,t) = \frac{\epsilon}{r^{1/2}} G(\sigma, \omega, \tau),$$

nous obtenons à partir de (0.1) une équation sur G, et nous devons résoudre un problème local dans un domaine

$$-C_0 \leq \sigma \leq M, \tau_0 \leq \tau \leq \bar{\tau}_\epsilon,$$

où $\bar{\tau}_\epsilon = \epsilon \bar{T}_\epsilon^{1/2}$ est inconnu. A cette étape de la preuve, nous avons encore un *problème à frontière libre*, le bord supérieur du domaine étant déterminé par le temps de vie.

Etape 2 : Eclatement du problème

Pour résoudre le problème local de l'étape 1, nous introduisons, comme dans la partie II, un changement de variables singulier (encore inconnu)

$$\Phi : (s, \omega, \tau) \mapsto (\sigma = \phi(s, \omega, \tau), \omega, \tau), \phi(s, \omega, \tau_0) = s.$$

L'idée est d'obtenir G sous la forme

$$G(\Phi) = w$$

pour des fonctions *régulières* ϕ et w, tout en s'arrangeant pour que ϕ_s s'annule en un point $\tilde{M}_\epsilon = (\tilde{m}_\epsilon, \bar{\tau}_\epsilon)$ du bord supérieur du domaine. Nous aurons alors $w_s = G_\sigma \phi_s$, et la condition ii) du théorème 2 donne

$$G_{\sigma\sigma}(\Phi) = v_s / \phi_s.$$

Nous voyons donc que u et ∇u vont rester continues tandis que $\nabla^2 u$ va exploser en un certain point.

Le changement crucial de point de vue est qu'au lieu de chercher une solution *singulière* G de l'équation normalisée de l'Etape 1, nous cherchons maintenant une solution *régulière* (ϕ, v, w) du système éclaté. Cependant, il ne suffit pas de résoudre près de τ_0 : il faut résoudre sur un domaine assez grand pour atteindre un point où $\phi_s = 0$.

Finalement, en introduisant un paramètre réel (qui correspond à la hauteur du domaine), nous pouvons nous ramener à travailler dans un domaine fixe.

Etape 3 : Existence et estimations douces pour le système éclaté linéarisé

C'est l'hypothèse (ND) qui implique que nous sommes dans le cas vraiment non-linéaire (au sens de la définition II.3). La théorie du II nous dit alors que le linéarisé du système éclaté se découple approximativement. Cela nous permet d'obtenir l'existence d'une solution et des estimations douces pour le système en travaillant seulement sur un problème de Goursat pour une équation scalaire du troisième ordre, dont la partie principale est simplement

$$(Z_1\partial_s - \phi_s Q)Z_1.$$

Ici, conformément à la théorie de II, Z_1 est un champ en $\partial_\tau, \partial_y$ de la forme

$$Z_1 = \partial_\tau + O(\epsilon^2),$$

tandis que Q est un opérateur du second ordre en $\partial_\tau, \partial_y$ de la forme

$$Q = \epsilon^2(\frac{1}{4\tau}\partial_\tau^2 - \frac{1}{\tau^3}\partial_\omega^2) + O(\epsilon^4).$$

Le point où ϕ_s s'annule est un point de dégénérescence pour cette équation . On obtient les estimations d'énergie nécessaires à l'aide d'un multiplicateur approprié.

Etape 4 : Retour à la solution u

A partir de w et ϕ, on obtient G et donc un morceau de solution $\tilde{u}$ de (0.1) avec les propriétés voulues. Il reste à prouver que $\tilde{u} = u$ là où $\tilde{u}$ est définie : on a alors établi la borne supérieure du temps de vie. Pour prouver complètement le théorème 1, encore faut-il montrer que u n'explose pas ailleurs, avant ; ce dernier point est non-trivial, et nécessite une étude fine (réalisée en [1]) du comportement asymptotique de u en grand temps *à l'intérieur* du cône d'ondes.

Bibliographie

[1] Alinhac S., *" Approximation près du temps d'explosion des solutions d'équations d'ondes quasilinéaires en dimension deux"* , Siam J. Math. Anal. 26(3), 1995, 529-565.
[2] Alinhac S., *"Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux II"*, Duke Math. J. 73(3), 1994, 543-560.
[3] Alinhac S., *"Explosion géométrique pour des systèmes quasi-linéaires"*, Amer. J. Math. 117(4), 1995, 987-1017.
[4] Alinhac S., *"Explosion des solutions d'une équation d'ondes quasi-linéaire en deux dimensions d'espace"*, Comm. PDE 21(5,6), 1996, 923-969.
[5] Alinhac S., *"Explosion de solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en plusieurs dimensions d'espace"*, Exposé V, Séminaire d'EDP, 1995/96, Ecole Polytechnique, Paris.
[6] Alinhac S., *"Blowup of small data solutions for a quasilinear wave equation in two space dimensions"*, Preprint, Université Paris-Sud, 1996.
[7] Alinhac S., *"Blowup of small data solutions for a class of quasilinear wave equations in two space dimensions II"*, Preprint, Université Paris-Sud, 1997.
[8] Alinhac S., *"Blowup for nonlinear hyperbolic equations"*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser, Boston, 1995.
[9] Alinhac S. and Gérard P., *"Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser"*, InterEditions, Paris, 1991.
[10] Hörmander L., *"The lifespan of classical solutions of nonlinear hyperbolic equations"*, Lecture Notes Math. 1256, Springer Verlag, 1986, 214-280.
[11] Hörmander L., *"Lectures on Nonlinear hyperbolic differential equations"*, Math. et Appl. 26, 1997, Springer Verlag.
[12] John F., *"Nonlinear wave equations. Formation of singularities"*, Leghigh University, University Lecture Series, Amer. Math. Soc., Providence, 1990.
[13] Klainerman S., *"Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation"*, Comm. Pure Appl. Math. 38, 1985, 321-332.
[14] Klainerman S., *"The null condition and global existence to nonlinear wave equations"*, Lectures Appl. Math. 23, 1986, 293-326.
[15] Majda A., *"Compressible fluid flow and systems of conservation laws"*, Springer Appl. Math. Sc. 53, 1984.

S. Alinhac, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex