SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1996-1997

Frank Pacard

Le problème de Yamabe sur des sous domaines de S^n

Séminaire É. D. P. (1996-1997), Exposé n° IX, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1996-1997____A9_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Le problème de Yamabe sur des sous domaines de S^n

Frank Pacard
Université Paris XII

Le problème de Yamabe sur des sous domaines de S^n peut s'énoncer de la manière suivante :
$\mathcal{P}$: Étant donné $\tilde{\Lambda}$ un sous ensemble fermé non vide de S^n, peut on construire sur $S^n \setminus \tilde{\Lambda}$ une métrique complète g qui soit conformément équivalente à g_0, la métrique standard de S^n, et pour laquelle la courbure scalaire est une constante ?

Rappelons que, si (M, g) est une variété Riemannienne de dimension n, le Laplacien conforme sur (M, g) est défini par

$$\mathcal{L}_g = \Delta_g - \frac{n-2}{4(n-1)} R_g,$$

où R_g désigne la courbure scalaire de (M, g). Le Laplacien conforme bénéficie de propriétés d'invariance que nous résumons dans la Proposition suivante :

Proposition 1 *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes de dimension n telles qu'il existe un difféomorphisme conforme $f : M \longrightarrow N$ (i.e. f est un difféomorphisme de M sur N pour lequel il existe une fonction $v : M \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$ telle que $f^* h = v^{\frac{4}{n-2}} g$). Alors, pour toute fonction $\phi : N \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on a*

$$\mathcal{L}_h(\phi) \circ f = v^{-\frac{n+2}{n-2}} \mathcal{L}_g(v \, \phi \circ f).$$

En utilisant cette proposition, on voit immédiatement que le problème auquel nous nous intéressons se ramène à l'étude de l'existence de solutions pour une équation aux dérivées partielles. En effet, si l'on cherche notre métrique g solution de $\mathcal{P}$ sous la forme

$$g = v^{\frac{4}{n-2}} g_0,$$

avec $v > 0$ sur $S^n \setminus \tilde{\Lambda}$, (ce qui traduit le fait que les deux métriques sont conformément équivalentes), et si v est solution de

$$\mathcal{L}_{g_0} v + \frac{n-2}{4(n-1)} R v^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \tag{1}$$

alors la courbure scalaire de g est R. Le fait que la métrique $g = v^{\frac{4}{n-2}} g_0$ est complète sur $S^n \setminus \tilde{\Lambda}$ doit être vérifié *a posteriori* en remarquant que cette condition doit en particulier impliquer que

$$\lim_{x \to \tilde{\Lambda}} v(x) = +\infty \tag{2}$$

sans que cette dernière condition soit suffisante.

1 Influence du signe de R_g sur la résolution de $\mathcal{P}$

Le problème $\mathcal{P}$ a attiré l'attention de nombreux chercheurs et nous ne tenterons pas de faire un exposé exhaustif de tous les résultats qui ont été obtenus sur ce problème. Afin de souligner la forte dépendance de $\mathcal{P}$ par rapport au signe de R_g, nous donnons ci-dessous quelques références et résultats.

Le cas de la courbure scalaire < 0. Dans le cas où l'on veut que $R_g < 0$, C. Loewner et L. Nirenberg ont démontré [7] que lorsque $\tilde{\Lambda} \subset S^n$ est une variété sans bord, il existe une solution au problème $\mathcal{P}$ si et seulement si la dimension de $\tilde{\Lambda} > \frac{n-2}{2}$. Depuis, ce problème a fait l'objet de travaux divers. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux articles récents de D. Finn [3], [4] pour de plus amples informations concernant les derniers travaux sur le sujet (par exemple, lorsque l'ensemble $\tilde{\Lambda}$ est une variété à bord).

Le cas de la courbure scalaire $= 0$. Dans le cas où $R_g = 0$, remarquons simplement que l'équation (1) devient linéaire. Des résultats d'existence de solutions sont donnés par R. Mazzeo [9], X. Ma et R. Mc Owen [8] ainsi que par P. Delanoë [2].

Le cas de la courbure scalaire > 0. Enfin, dans le cas où $R_g > 0$, R. Schoen et S.T. Yau ont démontré [18] que si $g = v^{\frac{4}{n-2}} g_0$ est solution de $\mathcal{P}$ alors v, qui *a priori* n'est solution de (1) que dans $S^n \setminus \tilde{\Lambda}$, est en fait une solution faible de (1) sur S^n tout entier. De plus, ils ont démontré que, dans le cas où il existe une solution au problème $\mathcal{P}$, la dimension de Hausdorff de l'ensemble $\tilde{\Lambda}$ devait nécessairement être $\leq \frac{n-2}{2}$.

2 Résultats d'existence pour la courbure scalaire strictement positive

Dans tout ce qui suit, nous concentrerons notre attention sur le cas où $R_g > 0$. Dans ce cas, quitte à multiplier v par une constante, on peut toujours supposer que dans l'équation (1) $R_g = n(n-1)$.

Dans [18], R. Schoen et S.T. Yau ont aussi démontré qu'il existait des solutions de $\mathcal{P}$ pour des $\tilde{\Lambda}$ de structure assez complexe : ensemble non rectifiables ! Ce qui réduit à néant l'espoir d'obtenir un quelconque résultat de "régularité de l'ensemble singulier".

De manière assez surprenante l'existence de solution pour des ensembles $\tilde{\Lambda}$ "plus raisonnables" est plus récente. R. Mazzeo et N. Smale [14] ont démontré le premier résultat d'existence de telles solutions dans le cas où l'ensemble $\tilde{\Lambda} \subset S^n$ est une perturbation de $S^k \subset S^n$. F. Pacard [15] a démontré l'existence de solutions dans le cas où $\tilde{\Lambda}$ est une variété sans bord de dimension $\frac{n-2}{2}$ (bien entendu dans ce dernier résultat n est pair !). Par la suite R. Mazzeo et F. Pacard [10] ont démontré le résultat suivant qui généralise tous les résultats précédents :

Théorème 1 *[10] Étant donné $\tilde{\Lambda} \subset S^n$ réunion finie de sous variétés (régulières) disjointes sans bord $\tilde{\Lambda}_i$ dont la dimension k_i vérifie $0 < k_i \leq \frac{n-2}{2}$, il existe une famille de dimension infinie de métriques complètes conformément équivalentes à la métrique standard sur $S^n \setminus \tilde{\Lambda}$ pour lesquelles la courbure scalaire est une constante strictement positive.*

Nous donnons maintenant une idée de la démonstration du Théorème 1, dans le cas où l'ensemble singulier est constitué d'une seule variété $\tilde{\Lambda}$ de dimension k. Dans un premier temps, on construit une solution approchée de la manière suivante : Si $(r, \theta, y) \in \mathbb{R} \times S^{n-k-1} \times \tilde{\Lambda}$ sont les coordonnées de Fermi dans un voisinage tubulaire de $\tilde{\Lambda}$, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, nous définissons

$$u_\varepsilon(r, \theta, y) = \chi(r) \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} v(r/\varepsilon)$$

où χ est une fonction régulière qui vaut 1 sur $(-\delta,\delta)$ et 0 en dehors de $(-2\delta,2\delta)$ (le paramètre $\delta>0$ est fixé "assez petit" une fois pour toutes).

Dans cette formule, $v(r)$ désigne l'unique solution radiale de

$$\Delta v+\frac{n(n-2)}{4}v^{\frac{n+2}{n-2}}=0 \qquad \text{dans} \qquad \mathbb{R}^{n-k}\setminus\{0\},$$

dont le comportement à l'origine est donné par

$$v(r)=(\frac{n-2}{n})^{\frac{n-2}{4}}r^{\frac{2-n}{2}}(1+o(1)) \qquad \text{quand} \qquad r\longrightarrow 0$$

et dont le comportement pour r grand est donné par

$$v(r)=r^{2-n+k}(1+o(1)) \qquad \text{quand} \qquad r\longrightarrow\infty.$$

L'existence de v est classique (en fait $t\longrightarrow e^{\frac{2-n}{2}t}v(e^{-t})$ est solution d'une EDO autonome dont l'étude ne pose aucun problème) et est garantie par le fait que, lorsque $1\leq k\leq\frac{n-2}{2}$, on a

$$\frac{n+2}{n-2}<\frac{n-k+2}{n-k-2}.$$

Autrement dit, l'exposant $\frac{n+2}{n-2}$ est sous critique en dimension $n-k$.

Ensuite, on désire perturber cette solution approchée afin d'obtenir une solution $u_\varepsilon+w$ de notre problème en écrivant

$$\mathcal{L}_{g_0}w+\frac{n(n+2)}{4}u_\varepsilon^{\frac{4}{n-2}}w=-\frac{n(n-2)}{4}((u_\varepsilon+w)^{\frac{n+2}{n-2}}-u_\varepsilon^{\frac{n+2}{n-2}}-\frac{n+2}{n-2}u_\varepsilon^{\frac{4}{n-2}}w)$$

$$-\mathcal{L}_{g_0}u_\varepsilon-\frac{n(n-2)}{4}u_\varepsilon^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Pour ε assez petit, l'existence d'une solution w "beaucoup plus petite" que u_ε est une conséquence du théorème de point fixe pour les applications contractantes dans les espaces suivants

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}_\nu(S^n\setminus\tilde\Lambda)=\left\{w=d(x)^\nu\bar w:\bar w\in\mathcal{C}^{k,\alpha}_{\text{loc}}(S^n\setminus\tilde\Lambda)\right\},$$

où $k\in\mathbb{N},\alpha\in]0,1[$ et $\nu\in\mathbb{R}$ et où d est une application de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $S^n\setminus\tilde\Lambda$ qui vaut $\mathrm{dist}(x,\tilde\Lambda)$ dans un voisinage tubulaire de $\tilde\Lambda$.

En effet, on montre [10] que d'une part l'opérateur

$$L_\varepsilon:w\longrightarrow\mathcal{L}_{g_0}w+\frac{n(n+2)}{4}u_\varepsilon^{\frac{4}{n-2}}w$$

est bien défini de $\mathcal{C}^{2,\alpha}_\nu(S^n\setminus\tilde\Lambda)$ dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}_{\nu-2}(S^n\setminus\tilde\Lambda)$ et que d'autre part, dans le cas où

$$-\frac{2}{p-1}<\nu<\Re(\frac{2-n+k}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(n-k-2)^2-n^2+4}),$$

l'opérateur L_ε est surjectif et qu'il existe un inverse à droite G_ε qui reste borné indépendemment de ε.

Ensuite, on ramène le problème à la recherche d'un point fixe pour l'application

$$w\longrightarrow-\frac{n(n-2)}{4}G_\varepsilon((u_\varepsilon+w)^{\frac{n+2}{n-2}}-u_\varepsilon^{\frac{n+2}{n-2}}-\frac{n+2}{n-2}u_\varepsilon^{\frac{4}{n-2}}w)$$

$$-G_\varepsilon(\mathcal{L}_{g_0}u_\varepsilon + \frac{n(n-2)}{4}u_\varepsilon^{\frac{n+2}{n-2}}).$$

Remarquons que les solutions qui sont construites de la sorte vérifient toutes que

$$\lim_{x\to\tilde{\Lambda}} \mathrm{dist}(x,\tilde{\Lambda})^{\frac{n-2}{2}}u(x) = (\frac{n-2}{n})^{\frac{n-2}{4}}.$$

Elles ont donc toutes, au voisinage de $\tilde{\Lambda}$, un comportement asymptotique simple. Malheureusement (ou heureusement ?) il existe d'autres solutions dont le comportement au voisinage de l'ensemble singulier est plus compliqué. L'existence de telles solutions est démontrée par R. Mazzeo [9] dans le cas où $\tilde{\Lambda} = S^k$ avec $1 \leq k < \frac{2-n}{2}$.

3 Le cas des singularités isolées

Dans tout ce qui suit nous supposerons que $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k\} \subset S^n$. Il sera plus commode (pour des raisons techniques) de travailler non pas sur la sphère mais sur $\mathbb{R}^n$. Pour ceci nous utilisons la projection stéréographique

$$\pi : S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

On voit que

$$\pi^{-1}(x) = (\frac{2x}{|x|^2+1}, \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}),$$

est un difféomorphisme conforme et que

$$(\pi^{-1})^* g_0 = \frac{4}{(1+|x|^2)^2}dx^2,$$

où dx^2 désigne la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$. La résolution de (1) est alors équivalente à la résolution de

$$\Delta u + \frac{n(n-2)}{4}u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \qquad \text{sur} \qquad \mathbb{R}^n \setminus \Lambda, \tag{3}$$

où $\Lambda = \pi(\tilde{\Lambda}) = \{p_1, \dots, p_k\}$.

De plus, on demande que u vérifie

$$\lim_{x\to\Lambda} u = +\infty, \tag{4}$$

(nous verrons par la suite que, les singularités étant isolées, cette condition entraîne directement la complétude de la métrique au voisinage de chaque p_i) et enfin, dans le cas où $N \notin \tilde{\Lambda}$, nous demandons que

$$u(x) = O(|x|^{2-n}) \qquad \text{quand} \qquad |x| \longrightarrow +\infty. \tag{5}$$

Cette dernière condition assure en quelque sorte que dans ce cas ∞ n'est pas une singularité.

Nous utiliserons souvent le fait que notre problème est invariant par le groupe des transformations conformes de $\mathbb{R}^n$. Plus précisément, si u est une solution faible de (3) alors la transformée de u par l'une des transformations suivantes est encore une solution faible de (3) (bien entendu, l'ensemble singulier est lui même modifié).

- les translations $u(x) \longrightarrow u(x+b)$, $b \in \mathbb{R}^n$.
- les rotations $u(x) \longrightarrow u(\mathcal{R}x)$, $\mathcal{R} \in O(n)$.
- les dilatations $u(x) \longrightarrow \lambda^{\frac{n-2}{2}}u(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+_*$.
- l'inversion par rapport à l'origine $u(x) \longrightarrow |x|^{2-n}u(x/|x|^2)$, (dite transformation de Kelvin).

3.1 Résultats d'existence et de non existence de solutions

En 1989, L.A. Caffarelli, B. Gidas et J. Spruck [1] ont démontré que, dans le cas où $\Lambda = \{0\}$, une solution de (3), (4) et (5) est nécessairement radiale (la démonstration repose sur la technique de réflexion d'Alexandroff telle qu'elle est développée dans l'article de B. Gidas, W.M. Ni et L. Nirenberg [5]). Ce résultat de symétrie et l'étude des solutions radiales de (3) permettent ensuite de conclure qu'il n'existe aucune solution dans le cas où $\Lambda = \{p_1\}$.

De plus, dans le cas où $\Lambda = \{0, \infty\}$, ils ont montré que toutes les solutions sont radiales. Étant donné que nous en aurons l'usage par la suite, déterminons toutes ces solutions. Si nous définissons

$$u(x) = |x|^{\frac{2-n}{2}} v(-\log|x|)$$

(ce qui revient à travailler sur le cylindre $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ au lieu de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en utilisant le fait que

$$\beta : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow (-\log|x|, x/|x|) \in \mathbb{R} \times S^{n-1}$$

est un difféomorphisme conforme et que

$$\beta^* d^2x = (\cosh t)^2 (dt^2 + d\theta^2).)$$

Nous voyons que $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$ est une solution de l'EDO autonome

$$\ddot{v} - \frac{(n-2)^2}{4} v + \frac{n(n-2)}{4} v^{\frac{n+2}{n-2}} = 0. \tag{6}$$

Définissons

$$H(v, \dot{v}) = \dot{v}^2 - \frac{(n-2)^2}{4}(v^2 - v^{\frac{2n}{n-2}}),$$

qui est une quantité constante le long des trajectoires de (6). Les solutions de (6) qui sont positives pour tout $t \in \mathbb{R}$ correspondent à des courbes de niveau de H qui sont incluses dans $\{(v, \dot{v}) / v \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{H}(v, \dot{v}) < 0\}$. Lorsque $H = 0$, les solutions sont données par $v \equiv 0$ ou bien

$$v(t) = (\cosh(\frac{n-2}{2}(t - t_0)))^{\frac{2-n}{2}},$$

pour un $t_0 \in \mathbb{R}$. Toutes les autres solutions positives sont périodiques. On peut paramétrer cet ensemble de solutions par $\varepsilon \in]0, (\frac{n-2}{n})^{\frac{n-2}{4}}]$. On notera v_ε l'unique solution de (6) vérifiant $v_\varepsilon(0) = \varepsilon$ et $\dot{v}_\varepsilon(0) = 0$ et on notera T_ε la période de cette fonction.

Remarquons, et ceci sera utile par la suite, que $0 < v_\varepsilon(t) < 1$. On a le Lemme suivant :

Lemme 1 *Il existe une constante $c > 0$ qui ne dépend que de n, telle que*

$$|v_\varepsilon(t) - \varepsilon \cosh(\frac{n-2}{2} t)| \leq c(\varepsilon \cosh(\frac{n-2}{2} t))^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{7}$$

Ce Lemme sera très important par la suite, en effet si nous définissons, pour $R > 0$ et $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

$$u_{\varepsilon,R}(x) = |x|^{\frac{2-n}{2}} v_\varepsilon(-\log|x| + \log R).$$

Le Lemme précédent assure que, lorsque ε tend vers 0, $\varepsilon^{-1} u_{\varepsilon,R}$ tend uniformément vers une fonction harmonique, sur tout compact de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} u_{\varepsilon,R}(x) = \frac{1}{2}(|x|^{2-n} R^{\frac{n-2}{2}} + R^{\frac{2-n}{2}}).$$

Ces solutions particulières $u_{\varepsilon,R}$ seront appelées "solutions de type Delaunay".

4 Comportement asymptotique des solutions au voisinage d'une singularité isolée

Toujours dans l'article de L.A. Caffarelli, B. Gidas et J. Spruck [1], il est démontré que

Théorème 2 *[1] Soit u une solution de (3) définie dans $B \setminus \{0\}$. Alors, ou bien u se prolonge en une solution régulière sur B tout entier, ou bien il existe $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et $R > 0$ tels que*

$$u(x) = u_{\varepsilon,R}(x) + o(|x|^{\frac{2-n}{2}}).$$

Ce premier résultat à pour corollaire immédiat que la condition (4) est une condition suffisante pour assurer la complétude de la métrique construite à partir d'une solution de (3) si celle ci n'a que des singularités isolées.

Plus tard, P. Aviles, N. Korevaar et R. Schoen ont amélioré le résultat précédent en montrant que l'on peut remplacer $o(|x|^{\frac{2-n}{2}})$ par $o(|x|^{\frac{2-n}{2}+\alpha})$ pour un $\alpha > 0$. Cette amélioration, qui à première vue pourrait paraître minime, est pourtant loin d'être un résultat trivial et est de plus le point de départ de notre prochain Théorème.

Définissons pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $R > 0$ et pour tout $a \in \mathbb{R}^n$

$$u_{\varepsilon,a,R}(x) = |x - a|x|^2|^{\frac{2-n}{2}} v_\varepsilon(-2\log|x| + \log|x - a|x|^2| + \log R).$$

C'est une solution faible de (3) qui est singulière en 0 et en $a/|a|^2$. En fait, cette solution est obtenue à partir de $u_{\varepsilon,R}$ en faisant agir certaines transformations. On effectue dans un premier temps une inversion pour obtenir $|x|^{\frac{2-n}{2}} v_\varepsilon(\log|x| + \log R)$. Ensuite, on effectue une translation ce qui nous amène à $|x - a|^{\frac{2-n}{2}} v_\varepsilon(\log|x - a| + \log R)$. Enfin, une dernière inversion nous donne la formule voulue. Un simple calcul permet de dire que le développement de $u_{\varepsilon,a,R}$ est donné par

$$u_{\varepsilon,a,R}(x) = u_{\varepsilon,R}(x) + |x|^{\frac{2-n}{2}}(a \cdot x)(-\dot{v}_\varepsilon(-\log|x| + \log R) + \frac{n-2}{2} v_\varepsilon(-\log|x| + \log R)) + O(|x|^{\frac{6-n}{2}}). \tag{8}$$

Le Théorème que nous évoquions plus haut s'énonce alors :

Théorème 3 *[6] Soit u une solution de (3) définie dans $B \setminus \{0\}$. Alors, ou bien u se prolonge en une solution régulière sur B tout entier, ou bien il existe $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$ tels que*

$$u(x) = u_{\varepsilon,a,R}(x) + o(|x|^{\frac{2-n}{2}+\alpha}),$$

pour un $\alpha > 1$.

Cette amélioration dans la connaissance du comportement asymptotique des solutions de (3) au voisinage d'une singularité isolée nous permettra de faire des calculs dans la section 8.

5 L'opérateur linéarisé dans la boule unité

La démonstration du dernier résultat ainsi que celle d'autres résultats que nous énoncerons plus tard est basée sur l'étude de l'opérateur linéarisé au voisinage d'une solution de type Delaunay.

Le résultat de L.A. Caffarelli, B. Gidas et J. Spruck (amélioré par P. Aviles, N. Korevaar et R. Schoen) nous assure que, au voisinage d'une singularité ponctuelle, toute solution est asymptotiquement égale à une solution de type Delaunay, il est donc raisonnable de penser que, au voisinage d'une singularité isolée, les propriétés de l'opérateur linéarisé en une solution de type Delaunay sont les mêmes que celles de l'opérateur linéarisé en une solution quelconque.

Il est ici plus commode d'utiliser la formulation de notre problème relativement à la métrique cylindrique définie en (6). Définissons

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_\theta - \frac{(n-2)^2}{4} + \frac{n(n+2)}{4} v_\varepsilon^{\frac{4}{n-2}}, \tag{9}$$

qui n'est rien d'autre que l'opérateur (6) linéarisé en v_ε. Remarquons que cet opérateur est un opérateur différentiel à coefficients périodiques.

Soient $\{\lambda_j,\ \chi_j(\theta)\}$ les données propres du Laplacien sur S^{n-1}. On suppose que dans l'indexation on a $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = n-1$, $\lambda_{n+1} = 2n$, etc. L'étude de $\mathcal{L}_\varepsilon$ est alors équivalente à l'étude d'une infinité d'équations différentielles ordinaires

$$\mathcal{L}_{\varepsilon,j} = \frac{d^2}{dt^2} + (\frac{n(n+2)}{4} v_\varepsilon^{\frac{4}{n-1}} - \frac{(n-2)^2}{4} - \lambda_j).$$

Lorsque $j > n+1$, on remarque que

$$\frac{n(n+2)}{4} v_\varepsilon^{\frac{4}{n-1}} - \frac{(n-2)^2}{4} - \lambda_j < 0,$$

car $0 < v_\varepsilon < 1$. On en déduit que $\mathcal{L}_{\varepsilon,j}$ vérifie le principe du maximum. Ce résultat reste valable pour $\mathcal{L}_{\varepsilon,1}$ mais la démonstration est beaucoup plus délicate (voir [12]).

Afin d'étudier les solutions de $\mathcal{L}_\varepsilon \psi(t,\theta) = 0$ il suffit d'étudier les solutions de $\mathcal{L}_{\varepsilon,j}\psi_j(t) = 0$, pour tout $j \geq 0$. On démontre [11] qu'il existe deux solutions linéairement indépendantes $\psi_j^\pm$ et une constante γ_j telle que $|e^{\mp\gamma_j t}\psi_j^\pm(t)| \leq 1$. De plus, pour $j = 0$, les solutions $\psi_0^\pm(t)$ de $\mathcal{L}_{\varepsilon,0}\psi = 0$ sont bornées et linéairement croissantes en t. C'est pourquoi nous poserons $\gamma_0 = 0$. En général, les racines indicielles γ_j dépendent de ε de manière non triviale et il semble impossible d'avoir leur valeur exacte. Néanmoins, si l'on différencie

$$T \longrightarrow v_\varepsilon(t+T), \qquad \text{et} \qquad \varepsilon \longrightarrow v_\varepsilon(t),$$

par rapport à T et ε, on trouve deux solutions linéairement indépendantes de $\mathcal{L}_{\varepsilon,0}\psi = 0$ qui sont données par

$$\psi_0^+(t) \equiv \frac{d}{dT} v_\varepsilon(t+T), \qquad \text{et} \qquad \psi_0^-(t) \equiv \frac{d}{d\varepsilon} v_\varepsilon(t). \tag{10}$$

On peut tout aussi bien différencier $v_{\varepsilon,a}$ par rapport à a_j, en $a = 0$, ce qui nous donne

$$\psi_j^+(t)\chi_j(\theta) \equiv \frac{d}{da_j} v_{\varepsilon,0}(t,\theta) = e^{-t}(-\dot{v}_\varepsilon(t) + \frac{n-2}{2} v_\varepsilon(t))\chi_j(\theta), \tag{11}$$

solution exponentiellement décroissante de $\mathcal{L}_{\varepsilon,j}\psi = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Remarquons que $\psi_1^+ = \ldots = \psi_n^+$. Enfin, en différenciant v_ε par rapport à θ_j, pour tout $j = 1, \ldots, n$, on trouve une solution exponentiellement croissante de $\mathcal{L}_{\varepsilon,j}\psi = 0$,

$$\psi_j^-(t)\chi_j(\theta) \equiv \frac{d}{da_j} v_{\varepsilon,a}(t,\theta) = e^{t}(-\dot{v}_\varepsilon(t) + \frac{n-2}{2} v_\varepsilon(t))\chi_j(\theta); \tag{12}$$

Comme corollaire des calculs précédents on trouve que $\gamma_0 = 0$ et $\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 1$ sont indépendants de ε. En ce qui concerne les autre racines indicielles, on dispose du résultat suivant :

Proposition 2 *[11] Pour tout $j \geq n+1$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \gamma_j = (\frac{(n-2)^2}{4} + \lambda_j)^{1/2}.$$

Définissons, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$, des espaces de Hölder sur des demi cylindres par

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\gamma}([t_0, +\infty[\times S^{n-1}) = \{w = e^{t\gamma}\bar{w} : \bar{w} \in \mathcal{C}^{k,\alpha}([t_0, +\infty[\times S^{n-1})\}.$$

De plus, si $\mathcal{F}$ est un espace des fonctions définies sur un demi cylindre, on notera $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ le sous espace constitué des fonctions nulles en $t = t_0$. Remarquons que $\psi_0^+(t_0) \neq 0$ si $t_0 \notin \{iT_\varepsilon/2 : i \in \mathbb{Z}\})$. Pour $j = 1, \ldots, n$, $\psi_j^+(t_0) \neq 0$ d'après (11) et pour tout $j \geq n+1$ $\psi_j^+(t_0) \neq 0$ d'après le principe du maximum.

Par définition

$$E_0 = \mathrm{Vect}\{\frac{1}{\varepsilon}\psi_0^+(t)\} \subset \mathcal{C}^{2,\alpha}_0([t_0, +\infty[\times S^{n-1})$$

et

$$E_1 = \mathrm{Vect}\{\frac{1}{\varepsilon}\psi_j^+(t)\chi_j(\theta) \; : \; j = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{C}^{2,\alpha}_{-1}([t_0, +\infty[\times S^{n-1}).$$

En ce qui concerne l'opérateur linéarisé, le résultat qui nous sera utile s'énonce :

Proposition 3 *[11] Supposons que $t_0 \notin \{iT_\varepsilon/2 : i \in \mathbb{Z}\}$. Si γ vérifie $(\gamma_0 =)\ 0 < \gamma < 1$, alors*

$$\mathcal{L}_\varepsilon : [\mathcal{C}^{2,\alpha}_{-\gamma}([t_0, +\infty[\times S^{n-1}) \oplus E_0]_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}_{-\gamma}([t_0, +\infty[\times S^{n-1}),$$

est un isomorphisme. En particulier il existe

$$\mathcal{G}_{0,\varepsilon} : \mathcal{C}^{0,\alpha}_{-\gamma}([t_0, +\infty[\times S^{n-1}) \longrightarrow [\mathcal{C}^{2,\alpha}_{-\gamma}([t_0, +\infty[\times S^{n-1}) \oplus E_0]_{\mathcal{D}},$$

tel que $\mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{G}_{0,\varepsilon} = I$. Si γ vérifie $(\gamma_1 = \ldots = \gamma_n =)\ 1 < \gamma < \gamma_{n+1}$, alors

$$\mathcal{L}_\varepsilon : [\mathcal{C}^{2,\alpha}_{-\gamma}([t_0, +\infty[\times S^{n-1}) \oplus E_0 \oplus E_1]_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{C}^{0,\alpha}_{-\gamma}([t_0, +\infty[\times S^{n-1}),$$

est un isomorphisme. En particulier il existe

$$\mathcal{G}_{1,\varepsilon} : \mathcal{C}^{0,\alpha}_{-\gamma}([t_0, +\infty[\times S^{n-1}) \longrightarrow [\mathcal{C}^{2,\alpha}_{-\gamma}([t_0, +\infty[\times S^{n-1}) \oplus E_0 \oplus E_1]_{\mathcal{D}},$$

tel que $\mathcal{L}_\varepsilon \mathcal{G}_{1,\varepsilon} = I$.

Afin de démontrer ce résultat on décompose

$$w = \sum_j w_j(r)\chi_j(\theta) \qquad \text{et} \qquad f = \sum_j f_j(r)\chi_j(\theta).$$

Et on résout chacune des équations.

$$\mathcal{L}_{\varepsilon,j} w_j = f_j, \qquad t > t_0, \quad \theta \in S^{n-1},$$

avec comme donnée au bord $w_j(t_0, \theta) = 0$.

En ce qui concerne le comportement des opérateurs $\mathcal{G}_{0,\varepsilon}$ et $\mathcal{G}_{1,\varepsilon}$ lorsque ε tends vers 0, on a le résultat suivant :

Proposition 4 *[11] Supposons que $t_0 \notin \{iT_\varepsilon/2 : i \in \mathbb{Z}\}$. Si γ vérifie $(\gamma_0 =)\ 0 < \gamma < 1$, alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||\mathcal{G}_{0,\varepsilon}|| = +\infty$$

et si γ vérifie $(\gamma_1 = \ldots = \gamma_n =)\ 1 < \gamma < \frac{n}{2}$, alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||\mathcal{G}_{1,\varepsilon}|| = +\infty.$$

En revanche, si γ vérifie $\frac{n}{2} < \gamma < \frac{n+2}{2} (= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \gamma_2)$, alors $\mathcal{G}_{1,\varepsilon}$ est bien défini pour ε assez petit et reste borné indépendemment de ε (la norme sur $E_0 \oplus E_1$ est la norme donnée par la somme des valeurs absolues des coordonnées dans la base naturelle).

6 Preuve du Théorème 3

Nous allons montrer, en utilisant la Proposition 3, qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$ tels que

$$u(x) = |x|^{\frac{2-n}{2}}(v_\varepsilon(-\log|x| + \log R) + (a \cdot x)\psi_1^+(-\log|x| + \log R) + O(|x|^\beta)),$$

pour un exposant $\beta > 1$. D'autre part, on vérifie aisément que $u_{\varepsilon,a,R}$ a un développement limité de la même forme, grâce à (8) et (11). Le résultat du Théorème en découle.

Grâce au résultat de P. Aviles, N. Korevaar et R. Schoen, on peut écrire

$$u(x) = |x|^{\frac{2-n}{2}}(v_\varepsilon(-\log|x|) + w(-\log|x|))$$

où $w(t) \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_{-\gamma}([t_0, +\infty[\times S^{n-1})$ pour un $\gamma > 0$. Remarquons qu'en utilisant une dilatation, on peut toujours supposer que $R = 1$.

En utilisant un développement de Taylor et le fait que u est solution de (3), on voit que

$$\mathcal{L}_\varepsilon w = \frac{n(n-2)}{4}\left((v_\varepsilon + w)^{\frac{n+2}{n-2}} - v_\varepsilon^{\frac{n+2}{n-2}} - \frac{n+2}{n-2}v_\varepsilon^{\frac{4}{n-2}}w\right) \equiv Q(w). \tag{13}$$

Multiplions w par une fonction "cut off" χ qui vaut 1 lorsque $t \geq t_0 + 2$ et 0 lorsque $t \leq t_0 + 1$. On peut alors réécrire l'équation précédente sous la forme

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\chi w) = Q(\chi w) + f, \tag{14}$$

où f est une fonction à support compact.

Quitte à diminuer γ, on peut toujours supposer que $\gamma \in (0, 1/2)$. Donc, $|w| \leq Ce^{-\gamma t}$ et de plus $Q(w)$ est borné par $Ce^{-2\gamma t}$. En utilisant la Proposition 3 on obtient

$$\chi w = \mathcal{G}_{0,\varepsilon}(Q(\chi w) + f). \tag{15}$$

Étant donné que $0 < \gamma < \gamma_1 = 1$, on trouve que $\chi w \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_{-2\gamma}([t_0, +\infty[\times S^{n-1})$. On itère ce procédé et, en un nombre fini d'étapes, on obtient que $\chi w \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_{-\beta}([t_0, +\infty[\times S^{n-1})$ pour un $\beta \in (1/2, 1)$. Finalement, on applique une fois de plus le résultat de la Proposition 3 pour trouver que

$$\chi w = \mathcal{G}_{1,\varepsilon}(Q(\chi w) + f). \tag{16}$$

Cette fois ci, étant donné que $1 < 2\beta$, on trouve que $\chi w \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_{-\gamma'}([t_0, +\infty[\times S^{n-1}) \oplus E_1$ pour un $\gamma' \in (1, \min\{2\beta, \gamma_2\})$.

7 Espace des solutions.

Dans cette section, il est préférable d'énoncer les résultats sur $S^n \setminus \tilde{\Lambda}$. Nous avons déjà vu que lorsque $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{p}_1\}$ il n'y a pas de solutions de (1). Lorsque $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2\}$ on connaî t l'ensemble des solutions : c'est une variété régulière de dimension 2 obtenue à partir de la famille à deux paramètres $u_{\varepsilon,R}$.

Lorsque $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k\}$, $k \geq 3$, le fait que l'ensemble des solutions est non vide est un résultat de R. Schoen [17]. En ce qui concerne l'étude de l'ensemble des solutions, elle a commencé par le résultat de D. Pollack

Théorème 4 *[16] Soit v_i une suite de solutions de (1). On suppose que $\forall i \in \mathbb{N}$ l'ensemble des singularités de v_i est donné par $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k\}$ et on note $\varepsilon_{i,1}, \ldots, \varepsilon_{i,k}$ les paramètres de*

Delaunay associés au différentes singularités de v_i. De plus, on suppose qu'il existe $\varepsilon^* > 0$ tel que

$$\forall j = 1, \dots, k, \quad \forall i \in \mathbb{N} \qquad \varepsilon_{i,j} \geq \varepsilon^*.$$

Sous de telles hypothèses, on peut extraire de la suite v_i une sous suite qui converge dans $\mathcal{C}^{2,\alpha}_{loc}(S^n \setminus \tilde{\Lambda})$ vers v^*. De plus, v^* est une solution de (1) singulière en chaque point de $\tilde{\Lambda}$.

Si v est une solution de (1), on note $\mathbb{L}_v$ l'opérateur linéarisé en v

$$\mathbb{L}_v = L_{g_0} + \frac{n(n+2)}{4} v^{\frac{4}{n-2}}.$$

Définissons pour tout $\nu \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in]0,1[$

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}_\nu(S^n \setminus \tilde{\Lambda}) = \{w = d(x)^\nu \bar{w} : \bar{w} \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{loc}(S^n \setminus \tilde{\Lambda})\}.$$

où d est une application de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $S^n \setminus \tilde{\Lambda}$ qui vaut $\mathrm{dist}(x, \tilde{p}_i)$ dans un voisinage de $\tilde{p}_i$.

R. Mazzeo, D. Pollack et K. Ulhenbeck [12] ont démontré le résultat suivant :

Théorème 5 *On suppose que la condition de non dégénérescence suivante est satisfaite*

$$Ker \mathbb{L}_v \cap \mathcal{C}^{2,\alpha}_\nu(S^n \setminus \tilde{\Lambda}) = \{0\},$$

pour tout $\nu > \frac{2-n}{2}$. Alors, au voisinage de v, l'ensemble des solutions de (1) est une variété analytique réelle de dimension k.

On ne sait toujours pas si les solutions construites par R. Schoen dans [17] sont non dégénérées. Des solutions non dégénérées ont été construites par R. Mazzeo, D. Pollack et K. Ulhenbeck [13] mais, dans cette construction, on ne peut pas prescrire l'ensemble des singularités qui doit nécessairement comporter un nombre pair de points. Récemment en collaboration avec R. Mazzeo [11], nous avons construit de nouvelles solutions non dégénérées. Nous donnerons dans la dernière section une idée de la construction de ces solutions.

Terminons cette section par la remarque suivante : en chaque singularité, nous avons les paramètres suivants : $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, c'est à dire $n+2$ paramètres. Ce qui nous fait en tout $k(n+2)$ paramètres ! Or, nous avons vu que l'ensemble des solutions est (au voisinage d'une solution non dégénérée) une variété de dimension k ! Il existe donc des relations entre ces différents paramètres. C'est ce que nous allons nous efforcer de découvrir dans la section suivante.

8 Invariants de Pohožaev : des contraintes entre les paramètres

On rappelle qu'un champ de Killing conforme sur $\mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs X défini sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\partial_{x_i} X^j + \partial_{x_j} X^i = c(x) \delta_{i,j} \tag{17}$$

où $x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow c(x) \in \mathbb{R}$ est une fonction qui dépend de X et où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Sur $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des champs de Killing conformes est un espace vectoriel de dimension $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Une base de cet espace est donnée par

$$X_1 = \sum_i b_i \partial_{x_i}, \qquad \forall b \in \mathbb{R}^n,$$

$$X_2 = \sum_i x_i \partial_{x_i},$$

$$X_3 = \sum_i ((b\cdot x)c_i - (c\cdot x)b_i)\partial_{x_i}, \qquad \forall b,c \in \mathbb{R}^n$$

et

$$X_4 = \sum_i ((b\cdot x)x_i - \frac{1}{2}|x|^2 b_i)\partial_{x_i}, \qquad \forall b,c \in \mathbb{R}^n.$$

Si u est une solution de

$$\Delta u + \frac{N(N-2)}{4} u^{\frac{N+2}{N-2}} = 0,$$

définie dans $\mathbb{R}^n \setminus \Lambda$. On peut multiplier cette équation par $X^i\partial_{x_i}u$ et, après un long calcul, on obtient

$$\mathrm{div}[(X\cdot\nabla u)\nabla u - |\nabla u|^2 X + \frac{(n-2)^2}{8} u^{\frac{2n}{n-2}} X + \frac{n-2}{2} cu\nabla u - u^2\frac{\nabla c}{2}] = 0 \tag{18}$$

dans $\mathbb{R}^n \setminus \Lambda$. Ici, la fonction $c(x)$ est celle qui apparaît dans (17).

Pour une solution u de (3), au point p_i les paramètres fournis par le Théorème 3 seront noté ε_i, a_i et R_i. On peut donc intégrer (18) sur $B_{1/\eta}(0) \setminus \cup_i B_\eta(x_i)$, utiliser le Théorème de la divergence et faire tendre η vers 0, on obtient alors grâce au développement fourni par le Théorème 3

$$\sum_i H(\varepsilon_i)((X(p_i)\cdot a_i) + \frac{1}{2N}\mathrm{div}X(p_i)) = 0 \tag{19}$$

Remarque 1 *Toutes les formules ainsi obtenues ne dépendent pas de R_i. Visiblement, on n'obtient ainsi qu'au plus $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ relations entre a_i et ε_i, ce qui est loin d'être suffisant pour déterminer les différents paramètres si k, le nombre de singularités est grand.*

Afin de donner une idée de ce que ces invariants peuvent fournir comme indications, nous appliquerons ces relations au cas où $k = 3$. Modulo une transformation conforme, on peut toujours supposer que

$$|p_i|^2 = 1, \qquad (p_i, p_j) = -1/2 \qquad \text{si} \qquad i \neq j$$

i.e. $p_1 + p_2 + p_3 = 0$. Alors les équations précédentes fournissent les relations suivantes.

$$a_1 = -\frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{6}\frac{H(\varepsilon_2) - H(\varepsilon_3)}{H(\varepsilon_1)}(p_2 - p_3),$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}p_2 - \frac{1}{6}\frac{H(\varepsilon_3) - H(\varepsilon_1)}{H(\varepsilon_2)}(p_3 - p_1),$$

$$a_3 = -\frac{1}{2}p_3 - \frac{1}{6}\frac{H(\varepsilon_1) - H(\varepsilon_2)}{H(\varepsilon_3)}(p_1 - p_2).$$

9 Construction de nouvelles solutions

Nous terminons cet exposé par un bref aperçu de la manière dont on peut construire des solutions de (3) ayant un nombre fini de singularités isolées.

On part de l'ensemble singulier

$$\Lambda = \{p_1, \dots, p_k\}.$$

Dans un premier temps, on va construire des solutions approchées. Celles ci sont obtenues en "recollant" des solutions de type Delaunay centrées en chaque p_i dont les paramètres ε_i sont "très petits" avec une fonction harmonique. Plus précisément, on note

$$\bar\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k), \quad \bar R = (R_1, \dots, R_k), \quad \text{et} \quad \bar a = (a_1, \dots, a_k)$$

un ensemble de paramètres. Afin que notre solution approchée soit suffisamment exacte, on doit choisir tous ces paramètres de manière adéquate.

On notera $\Omega_{\bar\rho} = \mathbb{R}^n \setminus \cup_{i=1}^k B(p_i,\rho_i)$ où par définition

$$\rho_i = \varepsilon_i^{\frac{4}{n^2-4}} \qquad \text{et} \qquad \bar\rho = (\rho_1,\dots,\rho_k). \tag{20}$$

On suppose de plus qu'il existe $q_1,\dots,q_k$ tels que

$$\varepsilon_i = \varepsilon q_i, \qquad i = 1,\dots,k, \tag{21}$$

pour un paramètre $\varepsilon > 0$ destiné à tendre vers 0.

Effectuons un développement limité de $u_{\varepsilon_i,a_i,R_i}(x-p_i)$ au voisinage de $\partial B(p_i,\rho_i)$

$$u_{\varepsilon_i,a_i,R_i}(x-p_i) = \frac{\varepsilon_i}{2}\left(R_i^{\frac{n-2}{2}}|x-p_i|^{2-n} + R_i^{\frac{2-n}{2}}(1+(n-2)(a_i\cdot(x-p_i))\right) + O(\varepsilon_i\rho_i^2).$$

Ce qui revient à dire que modulo des termes d'ordre supérieur, $u_{\varepsilon_i,a_i,R_i}$ ressemble à une application harmonique. Bien entendu pour arriver à un tel développement nous avons utilisé le résultat du Lemme 1 ainsi que le choix de ρ_i qui nous assure que $\varepsilon_i\rho_i^2 = \varepsilon_i^{\frac{n+2}{n-2}}\rho_i^{-n}$. Ensuite, nous définissons

$$\bar w_{\bar\varepsilon,\bar R}(x) = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{2}R_i^{\frac{n-2}{2}}|x-p_i|^{2-n}.$$

Cette fois ci, on trouve comme développement

$$\bar w_{\bar\varepsilon,\bar R}(x) = \frac{\varepsilon_{i_0}}{2}R_{i_0}^{\frac{n-2}{2}}|x-p_{i_0}|^{2-n} + \sum_{i\neq i_0}\frac{\varepsilon_i}{2}R_i^{\frac{n-2}{2}}(|p_{i_0}-p_i|^{2-n}+$$

$$(2-n)|p_{i_0}-p_i|^{-n}(p_{i_0}-p_i)\cdot(x-p_{i_0})) + O(\varepsilon_i\rho_i^2),$$

On voit bien que, afin que ces deux développements coï ncident au mieux, il est nécessaire de choisir q_i, R_i et a_i de telle sorte que

$$\sum_{i\neq i_0} R_i^{\frac{n-2}{2}}R_{i_0}^{\frac{n-2}{2}}q_i|p_{i_0}-p_i|^{2-n} = q_{i_0}, \quad i_0 = 1,\dots,k, \tag{22}$$

et

$$a_{i_0} = -\frac{1}{q_{i_0}}R_{i_0}^{\frac{n-2}{2}}\sum_{i\neq i_0} q_i R_i^{\frac{n-2}{2}}|p_{i_0}-p_i|^{-n}(p_{i_0}-p_i). \tag{23}$$

Pour tout $(\bar S,\bar\alpha) \in \mathbb{R}^k\times(\mathbb{R}^n)^k$, la solution approchée $\bar u_{\bar\varepsilon}(\bar R+\bar S,\bar a+\bar\alpha,\cdot)$ est définie par

$$\bar u_{\bar\varepsilon}(\bar R+\bar S,\bar a+\bar\alpha,x) = \begin{cases} u_{\varepsilon_i,a_i+\alpha_i,R_i+S_i}(x-p_i) & \text{dans} \quad B_{\rho_i}(p_i) \\ \bar w_{\bar\varepsilon,\bar R+\bar S} & \text{dans} \quad \Omega_{\bar\rho}.\end{cases}$$

Remarque 2 *La condition (21) indique tout simplement que $\bar q$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, d'une certaine matrice dont les coefficients dépendent de R_i. Il n'est pas difficile de voir que l'ensemble des $\bar q$ pour lesquels ces relations sont satisfaites est non vide.*

Maintenant que la solution approchée est définie, disons un mot de l'algorithme non linéaire utilisé pour perturber cette solution approchée afin d'obtenir une solution de (3). On suppose que $\bar q$, $\bar R$ et $\bar a$ sont fixés une fois pour toute comme ci-dessus.

On va perturber la solution approchée construite ci-dessus en lui ajoutant une fonction v qui est petite en un sens à préciser et aussi en s'autorisant de petites modifications des paramètres a_i et R_i. On veut donc résoudre

$$\mathcal{N}(w) \equiv \Delta(\bar{u}_{\bar{\varepsilon}}(\bar{R}+\bar{S},\bar{a}+\bar{\alpha},\cdot)+v) + \frac{N(N-2)}{4}(\bar{u}_{\bar{\varepsilon}}(\bar{R}+\bar{S},\bar{a}+\bar{\alpha},\cdot)+v)^{\frac{N+2}{N-2}}, \tag{24}$$

où $w=(v,\bar{S},\bar{\alpha}) \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_{\nu}(\mathbb{R}^n \setminus \Lambda) \times \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n)^k$. Ici

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}_{\nu}(\mathbb{R}^n \setminus \Lambda) = \{w = d(x)^{\nu}(1+|x|^2)^{(2-n)/2}\bar{w} \ : \ \bar{w} \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \Lambda)\}.$$

et d est une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ qui est égale à $\mathrm{dist}(x,p_i)$ au voisinage de p_i et qui est égale à 1 pour $|x|$ assez grand.

La raison de la nécessité des petites modifications des paramètres est la suivante : nous allons choisir comme espace de fonctions l'espace $\mathcal{C}^{2,\alpha}_{\nu}(\mathbb{R}^n \setminus \Lambda)$ pour $\nu \in (1,2)$. On voit dans l'énoncé de la Proposition 3 que c'est uniquement dans cet intervalle que l'on peut construire un inverse borné indépendemment de ε. Or, lorsque $\nu \in (1,2)$, on sait que l'opérateur linéarisé n'est pas surjectif s'il est défini sur $\mathcal{C}^{2,\alpha}_{\nu}(\mathbb{R}^n \setminus \Lambda)$, il faut donc ajouter un espace de dimension finie à cet espace (dans l'énoncé de la Proposition 3 c'est l'espace engendré par $\Psi_0^+,\dots,\Psi_n^+$) pour rendre l'opérateur surjectif. Les dérivées partielles de la solution approchée par rapport à α_i et S_i jouent justement ce rôle.

En utilisant la formule de Taylor on obtient alors :

$$w = -D\mathcal{N}_{|(0,0,0)}{}^{-1}\mathcal{N}(0) - D\mathcal{N}_{|(0,0,0)}{}^{-1}\left(\int_0^1 (D\mathcal{N}_{|(tv,\bar{S},\bar{\alpha})} - D\mathcal{N}_{|(0,\bar{S},\bar{\alpha})})(v,0,0)\,dt\right.$$

$$\left. +(D\mathcal{N}_{|(0,\bar{S},\bar{\alpha})} - D\mathcal{N}_{|(0,0,0)})(v,0,0) + \int_0^1 (D\mathcal{N}_{|(0,t\bar{S},t\bar{\alpha})} - D\mathcal{N}_{|(0,0,0)})(0,\bar{S},\bar{\alpha})\,dt\right),$$

équation qui sera résolue par un théorème de point fixe pour les applications contractantes [11].

References

[1] L.A. Caffarelli, B. Gidas et J. Spruck, *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth,* Comm. Pure Appl. Math. **42**, (1989), 271-297.

[2] P. Delanoë, *Generalized stereographic projection with prescribed scalar curvature,* Contemporary Mathematics : Geometry, Physics and Nonlinear PDE, V. Oliker et A. Treibergs edts. AMS (1990).

[3] D. Finn *Positive solutions of $\Delta_g u = u^q + Su$ singular at submanifolds with boundary,* Indiana Univ. Math. J., **43** (1994), 1359-1397.

[4] D. Finn *On the negative case of the singular Yamabe problem*, MSRI dg-ga server, preprint (1996).

[5] B. Gidas, W.M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle,* Comm. Math. Physics. **68**, (1979), 209-243.

[6] N. Korevaar, R. Mazzeo, F. Pacard et R. Schoen, *Refined asymptotics for constant scalar curvature metrics with isolated singularities,* Preprint (1997).

[7] C. Loewner et L. Nirenberg, *Partial differential equations invariants under conformal or projective transformations.* Contributions to Analysis. Acad. Press N.Y. (1974) 245-272.

[8] X. Ma et R. Mc Owen, *Complete conformal metric with zero scalar curvature in Riemannian Manifolds* Comm. P.D.E.

[9] R. Mazzeo, *Regularity for the singular Yamabe equation,* Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 1277-1299.

[10] R. Mazzeo et F. Pacard, *A new construction of singular solutions for a semilinear elliptic equation using asymptotic analysis* J. Diff. Geom. **44**, (1996), 331-370.

[11] R. Mazzeo et F. Pacard, *Constant scalar curvature metrics with isolated singularities* MSRI dg-ga server, preprint (1996)

[12] R. Mazzeo, D. Pollack et K. Uhlenbeck. *Moduli spaces of singular Yamabe metrics,* J. Amer. Math. Soc. **9 2**, (1996), 303-344.

[13] R. Mazzeo, D. Pollack et K. Uhlenbeck. *Connected sum constructions for constant scalar curvature metrics* To appear, Top. Methods Nonlin. Anal. **6**, (1995), 207-233.

[14] R. Mazzeo et N. Smale, *Conformally flat metrics of constant positive scalar curvature on subdomains of the sphere,* J. Diff. Geom. **34** (1991), 581-621.

[15] F. Pacard, *The Yamabe problem on subdomains of even dimensional spheres,* Top. Methods Nonlin. Anal. **6**, (1995), 137-150.

[16] D. Pollack, *Compactness results for complete metrics of constant positive scalar curvature on subdomains of* S^n, Indiana Univ. Math. J. **42**, (1993), 1441-1456.

[17] R. Schoen, *The existence of weak solutions with prescribed singular behavior for a conformally invariant scalar equation* Comm. Pure and Appl. Math. **XLI**, (1988), 317-392.

[18] R. Schoen et S. T. Yau, *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature,* Invent. Math. **92**, (1988), 47-72.